ISSN 1645-8281

Instituto Politécnico da Guarda
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Problema de Transportes

Amândio Pereira Baía

Ensino de qualidade na cidade mais alta

Instituto Politécnico da Guarda

Ficha Técnica:

Colecção de Manuais da ESTG

Título:
"Problema de Transportes"

Autoria:
Professor Doutor Amândio Baía

Edição:
Escola Superior de Tecnologia e Gestão da Guarda

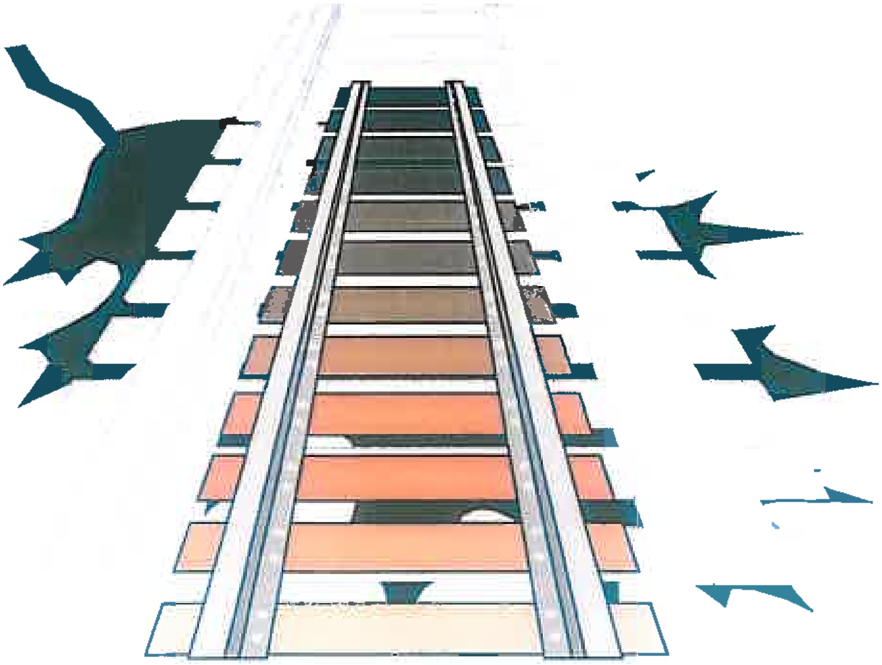
Impressão:
Serviço de Artes Gráficas e Reprografia do IPG

Tiragem:
100 Exemplares

ISSN 1645-8281

Outubro 2006

PROBLEMA
DE
TRANSPORTES



Amândio Baía

Sobre o Autor

Amândio Pereira Baía

Professor da Área de Gestão
Instituto Politécnico da Guarda

Licenciado em Gestão	PORTUGAL
MSc in Industrial Management	USA
PhD in Statistics & Operational Research	ENGLAND

Eleito Sócio da BETTA GAMMA SIGMA

BETTA GAMMA SIGMA

is the only honorary society in the field of Business Administration recognized by the American Assembly of Collegiate Schools of Business. Election to membership in BETTA GAMMA SIGMA is the highest scholastic honor that a student in Business Administration can win.

Instituto Politécnico da Guarda
Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Av Sá Carneiro
6300 GUARDA
Portugal

À Edite

À Ana Teresa

A tantos outros ....

Muito Obrigado

Prefácio

Apenas uma menção especial a todos os alunos a quem leccionei, talvez a razão de ser destes apontamentos.

Índice

Problema dos Transportes

Descrição

O modelo de transportes figura entre os modelos de Pesquisa Operacional mais implementados, essencialmente com objectivos de planeamento. Uma das principais vantagens do uso deste modelo prende-se com as eficiências computacionais que se conseguem, o que permite resolver aplicações que de outra maneira seriam impossíveis de resolver.

Uma segunda razão apontada para a popularidade deste modelo, é a existência de uma grande variedade de problemas relacionados com a distribuição de bens, daí o modelo herdar o nome de **Problema dos Transportes.**

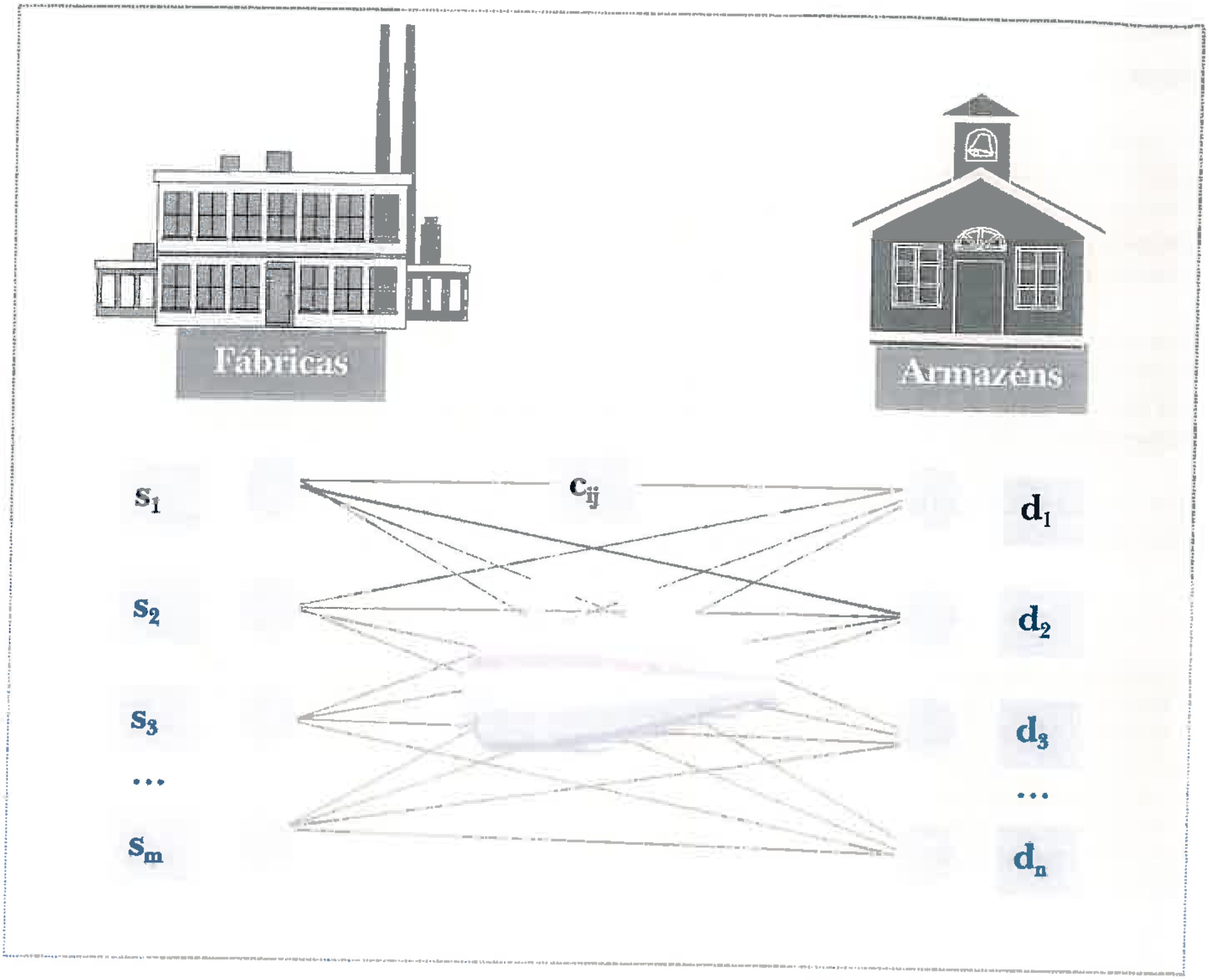
Uma terceira razão apontada para a importância deste modelo é a flexibilidade de aplicação a outros modelos além dos apontados. Como exemplo citamos:

- Controlo de inventário;
- Planeamento de horários de refeições, aviões, etc;
- Atribuição de pessoas a tarefas e máquinas a trabalhos;
- Problemas de misturas;
- Localização de fábricas;
- Problema dos caixeiros-viajantes;
- Comércio internacional;
- etc.

Enormes poupanças em custos têm sido conseguidas através do uso eficiente do modelo de transportes tornando desde logo as empresas mais competitivas.

Interpretação do Modelo

Na interpretação estandarde do modelo, existem m origens com produtos disponíveis a serem enviados para n destinos. Especificamente, a fábrica i pode enviar no máximo s_i (oferta) produtos e cada destino requer pelo menos d_j (procura) produtos. Os valores de s_i e d_j são fixos durante determinado horizonte temporal. O custo de envio de uma unidade da origem i para o destino j é dado por c_{ij}. Veja-se a figura seguinte.



O objectivo do modelo é o de escolher, para a duração do horizonte temporal, um plano de distribuição que minimize o custo total de transporte.
O método dos transportes representa um caso especial da Programação Linear. Usa uma versão do Método do Simplex. Por isso, o software para o método dos transportes é muito mais rápido, usa menos memória e pode resolver problemas maiores.

Objectivo do Modelo dos Transportes

O objectivo principal do modelo de transporte consiste em minimizar **(Função Objectivo)** o custo total de enviar um produto (ou produtos) das origens para os destinos respeitando as seguintes **Restrições:**

- Cada destino recebe as suas necessidades;
- Os envios das origens não podem exceder a capacidade disponível.

Formulação do Problema de Transportes como um Modelo de Programação Linear

A formulação estandarde de minimizar os custos de transporte de bens da origem *i* para o destino *j* é:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij} \qquad \text{(Custo Total)}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq s_i \qquad \text{para cada i } (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{(Oferta)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j \qquad \text{para cada j } (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(Procura)}$$

$$X_{ij} \geq 0$$

onde

Z = Custo total do sistema
c_{ij} = Custo de transporte de uma unidade de bem da origem i para o destino j
X_{ij} = Número total de unidades de bem transportadas da origem i para o destino j
s_i = Número total de unidades disponíveis na origem i
d_j = Número de unidades procuradas no destino j
m = Número de origens
n = Número de destinos

Aplicação Prática

A Empresa ALFA produz cadeiras em três cidades: Guarda Viseu e Aveiro. As cadeiras são transportadas para postos de venda situados em Lisboa, Porto, Braga e Faro. As capacidades de produção para os próximos 3 meses são as apresentadas na tabela seguinte

Fábrica	Capacidade de Produção (Próximos 3 meses)
(A) - Aveiro	5000
(G) - Guarda	6000
(V) - Viseu	2500

As previsões de vendas para os próximos 3 meses são as constantes da tabela seguinte:

Posto de Venda	Previsão de Vendas
(L) - Lisboa	6000
(P) - Porto	4000
(B) - Braga	2000
(F) - Faro	1500

Os custos de produção são iguais para as três fábricas. Os únicos custos variáveis são os custos de transporte unitários apresentados na tabela seguinte.

Fábrica	Posto de Vendas			
	Lisboa	Porto	Braga	Faro
Aveiro	3	2	7	6
Guarda	7	5	2	3
Viseu	2	5	4	5

Os gestores da Empresa ALFA precisam de saber qual o número de cadeiras a ser enviado de cada fábrica para cada posto de venda, de modo a minimizar o custo total.

Quadro de Resolução do Problema dos Transportes

Com o objectivo de sumariar os dados e guardar os cálculos dos algoritmos de forma eficiente é costume usar-se o seguinte quadro.

Origens	Destinos				Oferta
	1	2	...	n	
1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	...	c_{1n} X_{1n}	s_1
...	...	...	...	...	...
m	c_{m1} X_{m1}	c_{m2} X_{m2}	...	c_{mn} X_{mn}	s_m
Procura	d_1	d_2	...	d_n	

Vamos então estabelecer o quadro de transportes para o problema apresentado.

Fábrica	Posto de Venda				Oferta
	L	P	B	F	
A	3	2	7	6	5000
G	7	5	2	3	6000
V	2	5	4	5	2500
Procura	6000	4000	2000	1500	13500

Note que neste exemplo a procura total é igual à oferta total.

Convenções: (Exemplo)

Célula (A,L)	Caminho Aveiro – Lisboa
3	Custo de transporte de envio de uma cadeira de Aveiro para Lisboa.
5000	Disponibilidade de cadeiras na Fábrica de Aveiro
6000	Procura de cadeiras pelo Posto de Venda de Lisboa

Algoritmos de Solução

Os algoritmos para a solução do problema de transportes compreendem:

1. Encontrar uma Solução Básica Inicial Viável (SBIV);
2. Iterativamente determinar melhores soluções até se atingir a solução óptima.

Solução Básica Inicial Viável (SBIV)

A fase 1 do algoritmo consiste em encontrar soluções básicas iniciais viáveis. Existem diversos métodos que permitem determinar estas soluções. Apresentamos três dos mais usados.

Regra do Canto de Noroeste

Considerado o método mais fácil e rápido para determinar uma solução básica inicial viável. Geralmente resulta numa solução inicial "pobre" pois ignora a magnitude relativa dos custos.

Canto de Noroeste

Passo 1: Começar na célula superior esquerda do quadro (Canto de Noroeste). Atribuir o número máximo possível de unidades a esta célula. A quantidade atribuída é a menor quantidade entre a quantidade disponível nessa linha ou a quantidade pedida nessa coluna. $MIN(s_1,d_1)$.

Passo 2: Reduzir a quantidade disponível na linha e na coluna do valor atribuído à célula.

Passo 3: Se a quantidade disponível na linha for zero, mova-se para baixo para a próxima célula; se a quantidade da coluna for zero mova-se para a célula da direita; se a quantidade da linha e da coluna forem zero mova-se uma célula para baixo e para a direita.

Passo 4: Na célula identificada no passo 3, atribua a máxima quantidade possível e volte ao Passo 2 até uma solução básica inicial viável (satisfaça todos os valores da procura e não exceda os valores da oferta) ser encontrada.

Quando são atribuídas 5000 unidades à célula (A,L) esgota-se toda a oferta da Fábrica A.

Fábrica	Posto de Venda: L	P	B	F	Oferta	
A	3 / 5000	2	7	6	5000	0
G	7 / 1000	5 / 4000	2 / 1000	3	6000	5000 1000 0
V	2	5	4 / 1000	5 / 1500	2500	1500 0
Procura	6000	4000	2000	1500	13500	
	1000 0	0	1000 0	0		

Sequência de Preenchimento das Células:

Célula	(A,L) →	(G,L) →	(G,P) →	(G,B) →	(V,B) →	(V,F)	Total
Quantidade	5000	1000	4000	1000	1000	1500	→ 13500 unidades
Custo	15000	7000	20000	2000	4000	7500	→ 55500 euros

Método do Custo Mínimo

O problema principal deste método reside no facto de a escolha da célula com o menor custo poder bloquear outras células com custos interessantes.

Custo Mínimo

Passo 1: Seleccionar a célula com o custo mínimo e atribuir o máximo de unidades possível. Eliminar a linha e/ou coluna correspondente.

Passo 2: Das células restantes viáveis (isto é, não preenchidas ou em que a linha ou coluna correspondente não tenha sido eliminada) escolher a que tiver o menor custo e atribuir o máximo número de unidades possível.

Passo 3: Continuar o processo até que todas as ofertas e procuras sejam satisfeitas.

Fábrica	Posto de Venda L	P	B	F	Oferta	
A	[3] 1000	[2] 4000	[7]	[6]	5000	1000 0
G	[7] 2500	[5]	[2] 2000	[3] 1500	6000	4000 25000 0
V	[2] 2500	[5]	[4]	[5]	2500	0
Procura	6000	4000	2000	1500	13500	
	3500 2500 0	0	0	0		

Sequência de Preenchimento das Células:

Célula	(A,P)	(G,B)	(V,L)	(A,L	(G,F)	(G,L)	Total
Quantidade	4000	2000	4000	1000	1500	2500	→ 13500 unidades
Custo	8000	4000	5000	3000	4500	17500	→ 42000 euros

Nota: Em caso de empate no menor custo escolher arbitrariamente.

Método de VOGEL – Método das Penalidades

Este método procura encontrar uma solução viável inicial tendo em atenção os custos associados a outros caminhos alternativos. Também é conhecido por VAM (*Vogel Approximation Method*).

Vogel

Passo 1: Para cada linha e coluna do quadro de transporte, calcular uma penalidade, igual à diferença entre o **segundo** melhor custo unitário da linha (ou coluna) e o **melhor custo** unitário da linha (ou coluna).

Passo 2: Identificar a linha ou coluna com a maior penalidade e atribuir o máximo de unidades possível à célula com o menor custo dessa linha ou coluna.

Passo 3: Reduzir a quantidade da linha e da coluna do valor atribuído à célula.

Passo 4: Se a quantidade da linha for zero, eliminar a linha; se a quantidade da coluna for zero, eliminar a coluna; se forem ambas zero eliminar a linha e a coluna.

Passo 5: Calcular as novas penalidades para as linhas e colunas depois do passo 4 e voltar ao passo 2 até obter uma **solução básica inicial viável.**

Fábrica	Posto de Venda L	P	B	F	Oferta	Penalidade
A	3 1000	2 4000	7	6	5000	1 3 - - -
G	7 2500	5	2 2000	3 1500	6000	1 1 1 1 4
V	2 2500	5	4	5	2500	2 2 2 - -
Procura	6000	4000	2000	1500	13500	
Penalidade	1 1 5 - -	3 - - - -	2 2 2 - -	2 2 2 - -		

Sequência de Preenchimento das Células:

Célula	(A,P)	(A,L)	(V,L)	(G,B)	(G,F)	(G,L)	Total
Quantidade	4000	1000	2500	2000	1500	2500	13500 unidades
Custo	8000	3000	5000	4000	4500	17500	42000 euros

Nota: Em caso de empate escolher arbitrariamente.

Solução Básica Inicial Viável	
Método	Custo Total
Canto de Noroeste	55000
Custo Mínimo	42000
Vogel	42000

Note-se que, neste exemplo, o Método de Vogel e do Custo Mínimo fornecem a melhor solução, havendo uma diferença para o Método do Canto de Noroeste de 13000 unidades monetárias.

Vejamos agora a fase 2 do algoritmo de solução.

Encontrar a Solução Óptima

Facilmente se depreende que existem outras soluções para o problema. Então como encontrar a melhor solução?

Os métodos a seguir apresentados são procedimentos iterativos que permitem melhorar a solução básica inicial até encontrar a solução óptima.

Método Stepping-Stone

O método de *Stepping-Stone* apenas pode ser implementado se a solução básica inicial utilizar ***m+n-1* caminhos (células)**. Este método calcula as economias resultantes do uso de caminhos que não estão a ser usados no momento presente.

O caminho *Stepping-Stone* representa a sequência de ajustamentos que deve ser feita de modo a manter a solução viável.

Stepping-Stone

Passo 1: Para cada célula não ocupada, identificar no quadro o caminho *Stepping-Stone.*

Passo 2: Calcular a mudança na função objectivo causada pela adição de uma unidade a cada uma das células não ocupadas:

(a) Começar por numerar a célula não ocupada por 1 e numerar as outras células ocupadas pelo caminho *Stepping-Stone* sequencialmente de 2, 3, 4, ...

(b) A mudança na função objectivo resultante da adição de uma unidade a uma célula desocupada é encontrada juntando o custo unitário de todas as células ímpares do caminho e subtrair os custos unitários de todas as células pares do caminho.

Passo 3: Num problema de minimização, se todas as mudanças unitárias das células não ocupadas forem não negativas então a solução encontrada **é óptima**. Contudo se existirem mudanças negativas, identificar a **melhor célula** (valor mais negativo).

Passo 4: Para a melhor célula, re-identificar o caminho *Stepping-Stone*. Determinar nas células pares desse caminho a menor quantidade. Adicionar esta quantidade à nova e a todas as células ímpares. Subtrair esta quantidade de todas as células pares.

Voltar ao passo 1.

A título exemplificativo vamos calcular as economias resultantes do envio de uma unidade por um dos caminhos que não está a ser usado no momento presente, o caminho (Guarda-Porto) – (G,P).

Consideremos (por exemplo) a **solução básica inicial** encontrada pelo **Método de Vogel.**

Caminho *Stepping-Stone* - ajustamento **necessário** para manter a solução viável, isto é para não haver violação da oferta e/ou da procura.

Fábrica	Posto de Venda				Oferta
	L	P	B	F	
A	3 +1 1000	2 -1 4000	7	6	5000
G	7 -1 2500	5 +1	2 2000	3 1500	6000
V	2 2500	5	4	5	2500
Procura	6000	4000	2000	1500	13500

Nota: as células com valores negativos representam as células pares e as células com valores positivos representam as células ímpares.

Para se manter a viabilidade, isto é, para todas as restrições serem satisfeitas, a introdução de 1 unidade na célula (G,P) obriga ao reajustamento da solução encontrada na forma referida (caminho *Stepping-Stone*).

O transporte de uma cadeira pelo caminho (Guarda-Porto) obriga ao transporte de menos uma cadeira pelo caminho (Aveiro-Porto); de mais uma cadeira pelo caminho (Aveiro-Lisboa); e de menos uma cadeira pelo caminho (Guarda-Lisboa).

Vejamos agora o resultado líquido (mudança nos custos) de transportarmos uma cadeira através do caminho Guarda-Porto.

Fábrica	Posto de Venda				Oferta
	L	P	B	F	
A	+3 · 3 · 1000	-2 · 2 · 4000	7	6	5000
G	-7 · 7 · 2500	+5 · 5	2 · 2000	3 · 1500	6000
V	2 · 2500	5	4	5	2500
Procura	6000	4000	2000	1500	13500

Uso do Caminho Guarda-Porto (G,P)

Caminho "Stepping-Stone":	(G,P) →	(A,P) →	(A,L) →	(G,L) →	(G,P)	
Resultado Líquido =	+5	-2	+3	-7		= -1

O caminho *Stepping-Stone* representa o **menor** número de saltos possível.

Este resultado líquido significa que, por cada cadeira enviada por este caminho a função objectivo diminui de 1 unidade monetária (o custo total de transporte podem ser reduzido de 1 unidade monetária por cada cadeira enviada pelo caminho Guarda-Porto).

Na tabela seguinte apresentamos as economias resultantes dos caminhos não utilizados no momento: (utilizou-se a solução básica inicial calculada pelo método de VOGEL)

Célula não Utilizada	Caminho *Stepping-Stone*	Economia
(A,B)	(A,B) → (G,B) → (G,L) → (A,L) → (A,B)	+9
(A,F)	(A,F) → (G,F) → (G,L) → (A,L) → (A,F)	+7
(G,P)	(G,P) → (G,L) → (A,L) → (A,P) → (G,P)	-1
(V,P)	(V,P) → (V,L) → (A,L) → (A,P) → (V,P)	+4
(V,B)	(V,B) → (V,L) → (G,L) → (G,B) → (V,B)	+7
(V,F)	(V,F) → (V,L) → (G,L) → (G,F) → (V,F)	+7

Com base nas economias calculadas facilmente se depreende que deve ser utilizado o caminho Guarda-Porto pois é o que resulta numa maior economia. A questão que se põe neste momento prende-se em saber qual a quantidade máxima de +cadeiras a enviar por este caminho.

Sabendo-se que não podem ser enviadas quantidades negativas, então o número máximo de cadeiras a enviar por este caminho corresponde ao menor valor das células com custos negativos (células pares) no caminho *Stepping-Stone* (em que há redução da quantidade) ou seja, neste caso, o valor mínimo entre 2500 e 4000.

Quantidade Máxima a Enviar pelo Caminho mais Aliciante

Mínimo (Quantidades das células com custos negativos, no caminho "Stepping-Stone")

Depois de feitas as devidas alterações o novo quadro de transportes será o seguinte:

Fábrica	Posto de Venda L	P	B	F	Oferta
A	[3] 3500	[2] 1500	[7]	[6]	5000
G	[7]	[5] 2500	[2] 2000	[3] 1500	6000
V	[2] 2500	[5]	[4]	[5]	2500
Procura	6000	4000	2000	1500	13500

Calculando novamente as economias para os caminhos não usados, temos:

Célula não Utilizada	Caminho *Stepping-Stone*	Economia
(A,B)	(A,B) → (G,B) → (G,P) → (A,P) → (A,B)	7-2+5-2=8
(A,F)	(A,F) → (G,F) → (G,P) → (A,P) → (A,F)	6-3+5-2=6
(G,P)	(G,L) → (A,L) → (A,P) → (G,P) → (G,L)	7-3+2-5=1
(V,P)	(V,B) → (V,L) → (A,L) → (A,P) → (G,P) → (G,B) → (V,B)	5-2+3-2=4
(V,B)	(V,B) → (V,L) → (A,L) → (A,P) → (G,P) → (G,B) → (V,B)	4-2+3-2+5-2=6
(V,F)	(V,F) → (V,L) → (A,L) → (A,P) → (G,P) → (G,F) → (V,F)	5-2+3-2+5-3=6

Como todas as economias são positivas então foi encontrada a solução óptima (ou seja, se os caminhos com economias positivas forem utilizadas o custo da solução óptima piora).

Construção do Caminho *Stepping-Stone*

Nem sempre é fácil identificar o caminho "Stepping-Stone". Alguns considerandos importantes devem ser tomados em linha de conta.

- A direcção tomada (no sentido ou contrária aos ponteiros do relógio) é indiferente na determinação do caminho fechado. Será encontrado o mesmo caminho independentemente da direcção;
- Existe apenas um caminho fechado para cada célula em branco;
- O caminho deve seguir (muda direcção na) as células ocupadas. A excepção prende-se com a variável a ser avaliada;
- Tanto as células ocupadas como não ocupadas podem ser saltadas na construção do caminho fechado. Considere-se o seguinte exemplo arbitrário para a célula (1,C).

De	Destinos			Oferta
	A	B	C	
1	4 -1 1000	8	4 +1	1000
2	7	10 800	9	800
3	10 +1 2000	6 500	1 -1 1200	3700
Procura	3000	1300	1200	

Vejamos como calcular o resultado líquido de enviar **uma unidade** através do caminho (1,C).

Cada unidade transportada através do caminho (1,C) aumentará o custo total de 9 unidades monetárias.

Célula	Caminho	
(1,C)	(1,C) – (3,C) – (3,A) – (1,A)	Resultado Líquido
	+4 – -1 – +10 – -4	+9

Cada unidade transportada através do caminho (1,C) aumentará o custo de 4 unidades monetárias.

Por cada unidade que deixe de ser transportada através do caminho (1,A) o custo diminuirá de 4 unidades monetárias.

Apresentamos agora o cálculo dos resultados líquidos para as outras células não ocupadas:

Célula	Caminho "Fechado"	Resultado Líquido
(1,B)	(1,B) → (3,B) → (3,A) → (1,A) → (1,B)	+8 -6 +10 -4 = +8
(1,C)	(1,C) → (3,C) → (3,A) → (1,A) → (1,C)	+4 -1 +10 -4 = +9
(2,A)	(2,A) → (2,B) → (3,B) → (3,B) → (2,A)	+7 -10 +6 -10 = -7
(2,C)	(2,C) → (3,C) → (3,B) → (2,B) → (2,C)	+9 -1 +6 –10 = +4

O uso do caminho (2,A) é o mais aliciante pois por cada unidade transportada por este caminho o custo total decresce de 7 unidades monetárias.

- Um caminho pode-se cruzar-se através de si mesmo. Considere o seguinte exemplo, onde o caminho (3,A) está a ser avaliado.

	A	B	C	D	Oferta
1	4 -1 100	3	7 +1 20	12	120
2	7	6 70	11	7	70
3	10 +1	9	2	6 -1 120	120
4	8	4 80	4 -1 150	9 +1 50	280
Procura	100	150	170	170	

Vejamos agora, a título de exemplo, como calcular o resultado líquido para a célula (3,A):

Célula	Caminho	Resultado Líquido
(3,A)	(3,A) → (1,A) → (1,C) → (4,C) → (4,D) → (3,D)	
	+10 → -4 → +7 → -4 → +9 → -6	+12

O uso do caminho (3,A) aumenta o custo total de 12 unidades monetárias por cada unidade transportada.

- Apenas deve aparecer uma subtracção e uma soma em cada linha e em cada coluna do caminho.

O objectivo na determinação do caminho é não violar as restrições da procura e da oferta enquanto se re-atribuem unidades a uma célula não ocupada.

Método Modificado (MODI)

O leitor mais atento notou que muitas das vezes não é fácil encontrar o caminho *Stepping-Stone*.

O método MODI não é mais do que o método de *Stepping-Stone*, onde o cálculo das economias é determinado de uma forma (aritmética) mais fácil do ponto de vista de computação.

Método MODI

Passo 1: Fazer u_1=0. Usar as células ocupadas do quadro de transporte para calcular os índices das linhas $u_1, u_2, \ldots, u_m$ e os índices das colunas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de modo a que em todas as células ocupadas $u_i + v_j = c_{ij}$.

Passo 2: Calcular os custos e_{ij} de adicionar **uma unidade** a cada célula não ocupada através da fórmula $e_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$.

Passo 3: Seguir o passo 3 do método de *Stepping-Stone*.

Passo 4: Seguir o passo 4 do método de *Stepping-Stone*.

Cálculo dos índices - (células ocupadas)

Consideremos a solução básica inicial encontrada pelo Método de VOGEL.

Aveiro - Lisboa	$u_1 + v_1 = 3$	➡	(A,L)
Aveiro - Porto	$u_1 + v_2 = 2$	➡	(A,P)
Guarda - Lisboa	$u_2 + v_1 = 7$	➡	(G,L)
Guarda - Braga	$u_2 + v_3 = 2$	➡	(G,B)
Guarda - Faro	$u_2 + v_4 = 3$	➡	(G,F)
Viseu - Lisboa	$u_3 + v_1 = 2$	➡	(V,L)

Fazendo, por exemplo, u_1=0 (pois existem mais variáveis do que equações) resulta a seguinte solução para o sistema anterior:

u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	v_4
0	4	-1	3	2	-2	-1

Os v_j representam o custo de ter menos uma unidade de bem no destino j (i.e, preço sombra; custo unitário de esgotamento, custo de carência).

		$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=-2$	$v_4=-1$	
		L	P	B	F	Oferta
$u_1=0$	A	3 / +1 / 1000	2 / -1 / 4000	7	6	5000
$u_2=4$	G	7 / -1 / 2500	5 / +1	2 / 2000	3 / 1500	6000
$u_3=-1$	V	2 / 2500	5	4	5	2500
	Procura	6000	4000	2000	1500	13500

Caminho mais aliciante

Os u_i representam o custo implícito de ter mais uma unidade de bem na origem i (i.e, preço sombra; custo de armazenamento unitário).

Cálculo dos $e_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ (Economias para os caminhos não usados):

(A,B) =	7-0-(-2)	= 9	→	e_{13}	$= c_{13}-u_1-v_3$	
(A,F) =	6-0-(-1)	= 7	→	e_{14}	$= c_{14}-u_1-v_4$	
(G,P) =	5-4-2	= -1	→	e_{22}	$= c_{22}-u_2-v_2$	Caminho mais aliciante
(V,P) =	5-(-1)-2	= 4	→	e_{32}	$= c_{32}-u_3-v_2$	
(V,B)=	4-(-1)-(-2)	= 7	→	e_{33}	$= c_{33}-u_3-v_3$	
(V,F) =	5-(-1)-(-1)	= 7	→	e_{34}	$= c_{34}-u_3-v_4$	

Vejamos então qual a quantidade máxima de unidades que podem sem enviadas por este caminho:

Mínimo dos valores das células onde existe -1 no caminho *Stepping-Stone* = MIN(2500,4000)

		$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=-1$	$v_4=0$	
		L	P	B	F	Oferta
$u_1=0$	A	3 / 3500	2 / 1500	7	6	5000
$u_2=3$	G	7	5 / 2500	2 / 2000	3 / 1500	6000
$u_3=-1$	V	2 / 2500	5	4	5	2500
	Procura	6000	4000	2000	1500	13500

Aveiro - Lisboa	$u_1 + v_1 = 3$	⇒	(A,L)
Aveiro - Porto	$u_1 + v_2 = 2$	⇒	(A,P)
Guarda – Porto	$u_2 + v_2 = 5$	⇒	(G,P)
Guarda - Braga	$u_2 + v_3 = 2$	⇒	(G,B)
Guarda - Faro	$u_2 + v_4 = 3$	⇒	(G,F)
Viseu - Lisboa	$u_3 + v_1 = 2$	⇒	(V,L)

Fazendo, por exemplo, u_1=0, resulta a seguinte solução para o sistema anterior:

U_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	v_4
0	3	-1	3	2	-1	0

- **Cálculo dos $e_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$** (Economias para os caminhos não usados):

(A,B) =	7-(-1)-0	= 8	⇒	e_{13}	$= c_{13}-u_1-v_3$
(A,F) =	6-0-0	= 6	⇒	e_{14}	$= c_{14}-u_3-v_4$
(G,L) =	7-3-3	= 1	⇒	e_{21}	$= c_{21}-u_2-v_1$
(V,P) =	5-2-(-1)	= 4	⇒	e_{32}	$= c_{32}-u_1-v_2$
(V,B)=	4-(-1)-(-1)	= 6	⇒	e_{33}	$= c_{33}-u_3-v_3$
(V,F) =	5-(-1)-0	= 7	⇒	e_{34}	$= c_{34}-u_3-v_4$

Como todos os valores de e_{ij} são positivos então foi encontrada a solução óptima.

Custo Total da Solução Óptima para o Problema de Transportes da Empresa ALFA

Caminho		Unidades Enviadas	Custo Unitário	Custo Total
De	**Para**			
Aveiro	Lisboa	3500	3	10500
Aveiro	Porto	1500	2	3000
Guarda	Porto	2500	5	12500
Guarda	Braga	2000	2	4000
Guarda	Faro	1500	3	4500
Viseu	Lisboa	2500	2	5000
Total		13500		39500

O custo total de distribuição das cadeiras das fábricas para os postos de venda é de 39500 unidades monetárias. A título de curiosidade vejamos a diferença entre a solução óptima e as soluções básicas iniciais encontradas pelos diferentes métodos:

Solução Básica Inicial	Valor	Diferença
Canto de Noroeste	55000	15500
Custo Mínimo	42000	2500
Método de VOGEL	42000	2500

Note-se que houve uma poupança de 16000 unidades monetárias relativamente à solução básica inicial calculada pela regra do Canto de Noroeste.

Casos Especiais

Vejamos agora como lidar com situações diferentes das apresentadas.

Problema não Balanceado

Ocorre se a procura total não é igual à oferta total. Neste caso, como primeiro passo, precisamos de balancear o problema para podermos usar os métodos apresentados. Podem existir duas situações distintas:

- Se a procura total for superior à oferta total introduzir uma linha (fictícia) cujos custos são iguais a zero e com oferta igual à diferença entre a procura total e a oferta total;
- Se a oferta total for superior à procura total adicionar uma coluna (fictícia) cujos custos são iguais a zero e com procura igual à diferença entre a oferta total e a procura total.

Vejamos o seguinte exemplo em que a procura total excede a oferta total em 2000 unidades.

De	Para			Oferta
	A	B	C	
1	40	10	20	5000
2	15	20	10	100
3	20	25	30	900
Procura	1000	5000	2000	

O quadro seguinte apresenta o problema já balanceado. Repare-se que foi criado uma origem artificial (origem 4) com custos de transporte iguais a zero e que representa o número de unidades não satisfeitas (procura não satisfeita).

De	Para			Oferta
	A	B	C	
1	40	10	20	5000
2	15	20	10	100
3	20	25	30	900
4	0	0	0	2000
Procura	1000	5000	2000	8000

Considere agora o seguinte problema em que a oferta total é superior à procura total.

De	Para A	B	C	Oferta
1	40	10	20	8000
2	15	20	10	500
3	20	25	30	600
Procura	1000	5000	800	

Repare-se que a oferta total é de 9100 unidades e a procura total apenas de 6800 unidades. Vejamos então como se balanceia este problema.

De	Para A	B	C	D	Oferta
1	40	10	20	0	8000
2	15	20	10	0	500
3	20 2500	25	30	0	600
Procura	1000	5000	800	2300	

O destino D (fictício) representa o número de unidades que ficam em stock, neste caso 2300 unidades.

Problema de Maximização

A única modificação aos métodos descritos prende-se com a escolha da célula, do caminho *Stepping-Stone*, aonde atribuir a quantidade. Em vez de escolher a célula correspondente ao maior valor negativo de e_{ij}, escolhe-se a que tiver o maior valor, isto é, escolhe-se a célula que cause o máximo acréscimo unitário na função objectivo. Pára-se quando todos os e_{ij} forem negativos.

Para encontrar uma solução básica inicial viável o método do custo mínimo passa ao **Método da Maior Contribuição** (atribuir a máxima quantidade possível à célula onde figure o maior proveio).

O método de VOGEL, neste caso, será baseado na diferença entre o maior valor e o segundo maior valor.

Problema de Maximização

Uma outra alternativa de resolução de um **Problema de Maximização** é trabalhar com o valor simétrico dos custos das células (pois Max Z = - Min Z) e trabalhar normalmente um problema de minimização. O custo total óptimo do problema de maximização original é igual ao simétrico do valor da solução óptima do problema de minimização.

Consideremos o seguinte quadro de **transporte (Problema de Maximização)**:

De	Para: A	Para: B	Para: C	Oferta
1	5	7	12	4000
2	10	8	6	6000
3	9	4	8	2000
Procura	5000	4000	3000	12000

Vejamos como calcular uma **Solução Básica Inicial Viável** utilizando os três métodos.

- **O Método do Canto de Noroeste** funciona da mesma maneira que para um problema de minimização.

- **Método da Maior Contribuição**

De	Para: A	Para: B	Para: C	Oferta	
1	5	7 1000	12 3000	4000	1000 0
2	10 5000	8 1000	6	6000	1000 0
3	9	4 2000	8	2000	2000 0
Procura	5000	4000	3000	12000	
	0	3000 2000 0	0		

Sequência de Preenchimento das Células:

Célula	(1,C) →	(2,A) →	(2,B) →	(1,B) →	(3,B)	Total
Quantidade	3000	5000	1000	1000	2000	→ 12000 unidades
Custo	36000	50000	8000	7000	8000	→ 109000 euros

- **Método de VOGEL**

De	Para: A	B	C	Oferta
1	5	7 1000	12 3000	4000
2	10 3000	8 3000	6	6000
3	9 2000	4	8	2000
Procura	5000	4000	3000	12000

Penalidades (linhas)

<u>5</u>	2	2	-
2	2	2	-
1	<u>5</u>	-	-

Penalidades (colunas)

A	B	C
1	1	4
1	1	-
<u>5</u>	1	-
-	<u>1</u>	-

Sequência de Preenchimento das Células:

Célula	(1,C) →	(3,A) →	(2,A) →	(2,B) →	(1,B)	Total
Quantidade	3000	2000	3000	3000	1000	→ 12000 unidades
Custo	36000	18000	30000	24000	7000	→ 115000 euros

Vamos agora encontrar a **solução óptima** utilizando o Método MODI e a Solução Básica Inicial encontrada pelo Método da Maior Contribuição.

		$v_1=9$	$v_2=7$	$v_3=12$	
		A	**B**	**C**	**Oferta**
$u_1=0$	1	5	7 1000	12 3000	4000
$u_2=1$	2	10 -1 5000	8 +1 1000	6	6000
$u_3=-3$	3	9 +1	4 -1 2000	8	2000
	Procura	5000	4000	3000	12000

(1,B)	$u_1 + v_2 = 7$	$u_1=0$ $u_2=1$ $u_3=-3$ $v_1=9$ $v_2=7$ $v_3=12$
(1,C)	$u_1 + v_3 = 12$	
(2,A)	$u_2 + v_1 = 10$	
(2,B)	$u_2 + v_2 = 8$	
(3,B)	$u_3 + v_2 = 4$	

Cálculo dos $e_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ (Economias para os caminhos não usados):

(1,A) =	5-0-9	= -4	⟹	e_{11}	$= c_{11}-u_1-v_1$	Por cada **unidade** enviada **pelo caminho** (3,A) o **lucro aumenta de 3 unidades monetárias.**
(2,C) =	6-1-12	= -7	⟹	e_{23}	$= c_{23}-u_2-v_3$	
(3,A)	9-(-3)-9	**=+3**	⟹	e_{31}	$= c_{31}-u_3-v_1$	
(3,C) =	8-(-3)-12	= -1	⟹	e_{33}	$= c_{33}-u_3-v_3$	

O número máximo de unidades possível a enviar pelo caminho (3,A) é igual a:
Min(2000,5000) = 2000 unidades

		$v_1=9$	$v_2=7$	$v_3=12$	
		A	**B**	**C**	**Oferta**
$u_1=0$	1	[5]	[7] 1000	[12] 3000	4000
$u_2=1$	2	[10] 3000	[8] 3000	[6]	6000
$u_3=-0$	3	[9]	[4] 2000	[8]	2000
	Procura	5000	4000	3000	12000

(1,B)	$u_1 + v_2 = 7$	$u_1=0$ $u_2=1$ $u_3=0$ $v_1=9$ $v_2=7$ $v_3=12$
(1,C)	$u_1 + v_3 = 12$	
(2,A)	$u_2 + v_1 = 10$	
(2,B)	$u_2 + v_2 = 8$	
(3,A)	$u_3 + v_1 = 9$	

Cálculo dos $e_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ (Economias para os caminhos não usados):

(1,A) =	5-0-9	= -4	⟹	e_{11}	$= c_{11}-u_1-v_1$	Como todos os e_{ij} são negativos então foi encontrada a solução óptima.
(2,C) =	6-1-12	= -7	⟹	e_{23}	$= c_{23}-u_2-v_3$	
(3,B)	4-0-7	= -3	⟹	e_{32}	$= c_{32}-u_3-v_2$	
(3,C) =	8-0-12	= -4	⟹	e_{33}	$= c_{33}-u_3-v_3$	

Lucro Total da Solução Óptima para o Problema de Transportes

Caminho De	Caminho Para	Unidades Enviadas	Lucro Unitário	Lucro Total
1	B	1000	7	7000
1	C	3000	12	36000
2	A	3000	10	30000
2	B	3000	8	24000
3	A	2000	9	18000
Total		12000		115000

Note-se, a nível de curiosidade, que a Solução Básica Inicial encontrada pelo método de VOGEL corresponde à solução óptima.

Vejamos, a nível de curiosidade, outro algoritmo que nos permite resolver os problemas de maximização.

Problema de Maximização - Algoritmo

1. Na tabela L_{ij} encontrar o maior lucro – $Max(L_{ij})$;
2. Construir uma nova tabela subtraindo ao valor encontrado em 1. todos os valores da tabela – $Max(L_{ij})-L_{ij}$;
3. Resolver o correspondente problema utilizando um dos métodos descritos para um problema de minimização;
4. Calcular o lucro total na matriz inicial do problema.

Vamos agora resolver o problema apresentado anteriormente aplicando o algoritmo descrito.

1. Tabela L_{ij}

De	Para A	Para B	Para C	Oferta
1	5	7	12	4000
2	10	8	6	6000
3	9	4	8	2000
Procura	5000	4000	3000	

$Max(L_{ij})=10$

2. Construção da nova tabela – $Max(L_{ij}) - L_{ij}$

De	Para A	Para B	Para C	Oferta
1	7	5	0	4000
2	2	4	6	6000
3	3	8	4	2000
Procura	5000	4000	3000	

3. Solução do problema anterior utilizando um método de minimização

Caminho		
De	Para	Unidades
1	B	1000
1	C	3000
2	A	3000
2	B	3000
3	A	2000
Total		12000

4. Calculo do lucro total – matriz inicial

Caminho		Unidades	Lucro	Lucro
De	Para	Enviadas	Unitário	Total
1	B	1000	7	7000
1	C	3000	12	36000
2	A	3000	10	30000
2	B	3000	8	24000
3	A	2000	9	18000
Total		12000		115000

Caminhos Proibidos

Atribuir a estes caminhos custos muito grandes (M) para que fiquem fora da solução (não sejam aliciantes para a solução).

- No caso de minimização (M) → custo muito grande.
- No caso de maximização (-M) → lucro muito pequeno.

O valor prático de M (embora dependente do contexto) pode ser igual, por exemplo, a 9999.

Consideremos o seguinte exemplo, cujo objectivo é a **minimização** do custo total.

De	Para A	Para B	Para C	Oferta
1	40	10	20	8000
2	15	20	10	500
3	20	25	30	600
Procura	1000	5000	800	

Por questões de segurança é impossível usar o caminho (2,A) dado que uma ponte ruiu. Como incorporar esta restrição no problema? Como é óbvio, esta restrição vem piorar a solução óptima (se este caminho estiver a ser usado) ou deixá-la inalterável (caso este caminho não esteja a ser usado).

Vejamos então como tratar esta situação. Apenas foi substituído o custo de 15 unidades monetárias da célula (2,A) por um valor muito grande (neste caso 9999), para não ser aliciante o uso deste caminho na solução óptima.

De	Para A	B	C	Oferta
1	40	10	20	8000
2	9999	20	10	500
3	20	25	30	600
Procura	1000	5000	800	

De	Para A	B	C	Oferta
1	0	5000	700	8000
2	400	0	100	500
3	600	0	0	600
Procura	1000	5000	800	

Custo Total = 83000
(Problema sem a restrição)

De	Para A	B	C	Oferta
1	400	5000	300	8000
2	0	0	500	500
3	600	0	0	600
Procura	1000	5000	800	

Custo Total = 89000
(Problema com a restrição)

Veja-se que esta restrição aumenta o custo total de 6000 unidades monetárias.

Se o problema apresentado fosse de maximização, então teríamos de substituir o valor da célula (1,B) por um valor muito pequeno (por exemplo -9999) para não ser aliciante usar este caminho na solução óptima.

Soluções Óptimas Alternativas

Ocorrem quando encontrada a solução óptima, existem caminhos (não usados no presente momento) onde as economias são iguais a zero ($e_{ij}=0$). Neste caso, se usarmos este caminho a solução óptima permanecerá inalterada, muito embora a combinação óptima seja diferente.

Considere-se o seguinte exemplo, cujo objectivo é a minimização do custo total.

De	Para A	B	C	Oferta
1	8	5	6	120
2	14	10	12	80
3	3	9	10	80
Procura	150	70	60	

Vejamos duas soluções óptimas para este problema.

De	Para A	B	C	Oferta
1	70	0	50	120
2	0	70	10	80
3	80	0	0	80
Procura	150	70	60	

Custo Total = 1920
(Solução Óptima)

De	Para A	B	C	Oferta
1	60	0	60	120
2	10	70	0	80
3	80	0	0	80
Procura	150	70	60	

Custo Total = 1920
(Solução Óptima Alternativa)

Calculemos os e_{ij} para a situação Solução Óptima:

(1,A)	$u_1 + v_1 = 8$	$u_1=0$
(1,C)	$u_1 + v_3 = 6$	$u_2=6$
(2,B)	$u_2 + v_2 = 10$	$u_3=-5$
(2,C)	$u_2 + v_3 = 12$	$v_1=8$
(3,A)	$u_3 + v_1 = 3$	$v_2=4$ $v_3=6$

Cálculo dos $e_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (Economias para os caminhos não usados):

(1,B) =	5-0-4	= 1	—	e_{12}	$= c_{12} - u_1 - v_2$	Como e_{21} é igual a zero então se usarmos o caminho (2,A) o valor da solução óptima permanece inalterável.
(2,A) =	14-6-8	= 0	—	e_{21}	$= c_{21} - u_2 - v_1$	
(3,B) =	9-(-5)-4	= 10	—	e_{32}	$= c_{32} - u_3 - v_2$	
(3,C) =	10-(-5)-6	= 9	—	e_{33}	$= c_{33} - u_3 - v_3$	

Como o caminho (2,A) tem uma economia igual a zero ($e_{21}=0$) então existe outra solução óptima alternativa que pode ser identificada atribuindo o número máximo viável de unidades ao caminho (2,A) de acordo com o caminho *Stepping-Stone* – neste caso de 10 unidades. Isto resulta num outro padrão de atribuição (referida como **Solução Óptima Alternativa**) mas com o mesmo custo total – ou seja de 1920.

Uma situação deste tipo (soluções óptimas múltiplas) é útil para o gestor pois dispõe de mais alternativas no processo de decisão.

Solução Degenerada

Pode ocorrer uma dificuldade aquando da aplicação dos métodos expostos. É o caso de haver menos de *m+n-1* células ocupadas no caso de um problema de *m*-origens e *n*-destinos. As células ocupadas não são suficientes para identificar todos os caminhos *Stepping-Stone* – esta situação chama-se de **degenerescência**. Pode ocorrer tanto na determinação da solução inicial como nas iterações posteriores. Neste caso **não pode ser usado** quer o Método de *Stepping-Stone* quer o Método MODI.

Para resolver este problema, deve criar-se "artificialmente" uma célula ocupada. Atribui-se 0 unidades a essa célula, passando a ser considerada ocupada (nada é enviado por esse caminho) de modo a que seja possível definir todos os caminhos *Stepping-Stone*.

Vejamos o seguinte exemplo em que a solução inicial foi calculada usando o Método do Canto de Noroeste:

De	Para A	Para B	Para C	Oferta
1	40 1000	10 0	20	1000
2	15	20 5000	10 1000	6000
3	20	25	30 1000	1000
Procura	1000	5000	2000	

Como a oferta da origem 1 é igual à procura do destino 1 (1000 unidades) então apenas ficam ocupadas 4 células em vez de cinco (m+n-1=5). Existe uma solução degenerada.

> Para compensar esta deficiência, é preciso atribuir a uma célula não ocupada zero unidades de modo a ser possível definir todos os caminhos *Stepping-Stone*. Esta atribuição de 0 unidades indica que não existem actualmente unidades nesta célula mas é tratada como uma célula ocupada para efeitos de determinação da solução.

Existem diferentes possíveis candidatos para esta atribuição de 0 unidades. Por exemplo, podemos ocupar a célula X_{1B} com 0 unidades e já é possível continuar todo o processo de resolução.

Vamos agora ver o que acontece quando esta situação de degenerescência ocorre durante um dos passos de determinação da solução óptima.

De	Para			Oferta
	A	B	C	
1	8 240	5	6	240
2	15 -1 60	10 +1 100	12	160
3	3 +1	9 -1 60	10 100	160
Procura	300	160	100	

O quadro anterior representa a Solução Básica Inicial calculado pelo Método do Canto de Noroeste. O cálculo dos e_{ij} (para os caminhos não ocupados) indica que deve ser usado o caminho X_{3A}, atribuindo um máximo possível de 60 unidades.

Quando a atribuição das 60 unidades é feita à célula X_{3A} a solução torna-se degenerada pois ambos as quantidades de X_{2A} e X_{3B} são ambas iguais a 60 unidades. Para continuar a solução deste problema é necessário (ficarem ocupadas 5 células) atribuir 0 unidades a uma destas duas células e continuar a solução normalmente. Por exemplo X_{3B}=0.

Fábrica	Posto de Venda			Oferta
	A	B	C	
1	8 240	5	6	240
2	15	10 160	12	160
3	3 60	9 0	10 100	160
Procura	300	160	100	

A avaliação deste quadro pelo Método de *Stepping-Stone* identifica X_{1B} como o caminho mais aliciante (e_{1B}= - 9). Contudo, como o caminho *Steping-Stone* para esta célula contém o valor 0 na célula X_{3B} então a quantidade mínima a ser subtraída resulta apenas na transferência do valor 0 de X_{3B} para X_{1B}. O processo continua da maneira usual.

Quando **existir um** empate **na** quantidade **a ser subtraída** no **caminho** *Stepping-Stone*, para **se** continuar o método, tem de se preencher todas as células **menos uma,** onde houve o empate, com zero unidades de modo a ficarem preenchidos *m+n-1* caminhos.

Transexpedição

Representa uma extensão do problema dos transportes, onde cada origem e cada destino podem ser um ponto intermédio de envio de bens das origens para os destinos. O Problema da Transexpedição pode ser resolvido com pequenos ajustamentos à formulação do problema dos transportes.

Tal como o problema dos transportes este problema preocupa-se em minimizar os custos totais de atribuição. A diferença é que neste tipo de problema as origens e os destinos também podem servir como pontos de transexpedição - as unidades podem ser enviadas através de uma origem ou de um destino intermédio no seu percurso para o destino final.

Exemplo

Consideremos o problema apresentado na tabela seguinte:

De	Para			Oferta
	A	B	C	
1	9	8	1	30
2	1	7	8	30
Procura	20	20	20	

Além disso, suponha que todas as origens e destinos podem servir de pontos de transexpedição.

Por exemplo, dependendo dos custos envolvidos, em vez de enviar directamente as unidades da origem 1 para o destino A, poderá ser mais barato enviá-las para a origem 2 e dali enviá-las para o destino A. Neste caso a origem 2 serve como um ponto de transexpedição.

A chave para resolver este tipo de problemas é formular um problema de transportes de maior dimensão, que englobe todos os pontos de transexpedição. Para o nosso exemplo construiu-se o seguinte quadro de transporte:

De	Para					Oferta
	1	2	A	B	C	
1	0	1	9	8	1	30
2	2	0	1	7	8	30
A	9	1	0	2	1	0
B	8	7	2	0	9	0
C	1	8	1	9	0	0
Procura	0	0	20	20	20	

Os custos apresentados foram determinados pela gestão da empresa. **Pode acontecer que o custo de enviar uma unidade do bem da origem *i* para o destino *j* seja diferente do de enviar uma unidade do destino *j* para a origem *i*** (c_{12}=1 e c_{21}=2).

Para este problema, **por exemplo**, é mais barato enviar unidades de 1 para 2 e daí para A do que enviá-las directamente de 1 para A:

De 1 – 2 – A	Custa 2 unidades monetárias o envio de 1 unidade
De 1 – A	Custa 9 unidades monetárias o envio de 1 unidade

No quadro anterior fixámos inicialmente a procura e a oferta para os novos centros igual a zero. Contudo se aplicarmos o algoritmo para este novo problema, a transexpedição de 1→2→A não será possível. Então precisamos de alterar o quadro anterior para permitir que as transexpedições sejam possíveis.

Muito embora não saibamos quanto vai ser transexpedido entre cada origem e cada destino na solução óptima, sabemos contudo um limite superior para estes valores – o valor da oferta (procura) total. No nosso exemplo suponhamos que adicionamos este valor, ou sejam 60 unidades, a cada oferta e a cada **procura:** (na realidade o valor a adicionar tem de ser no mínimo igual à oferta que também é igual à **procura):**

De	Para					**Oferta**
	1	**2**	**A**	**B**	**C**	
1	0	1	9	8	1	90
2	2	0	1	7	8	90
A	9	1	0	2	1	60
B	8	7	2	0	9	60
C	1	8	1	9	0	60
Procura	60	60	80	80	80	

Neste caso se for mais barato fazer uma transexpedição então ela será feita. As 60 unidades adicionadas podem ser encaradas como um "armazém temporário" – para lidar com as transexpedições.

Usando os métodos descritos anteriormente, a solução óptima para este problema é a seguinte:

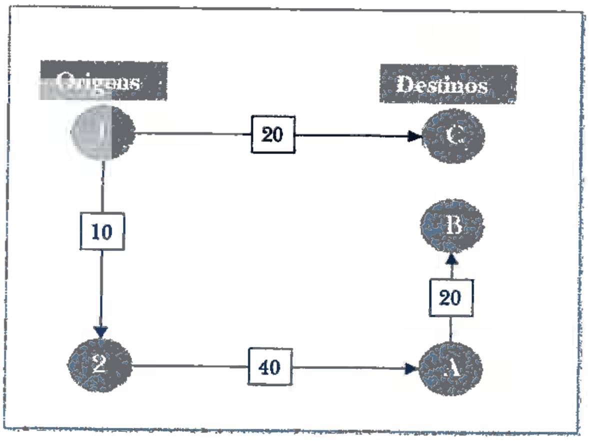
De	Para					**Oferta**
	1	**2**	**A**	**B**	**C**	
1	60	10			20	90
2		50	40			90
A			40	20		60
B				60		60
C					60	60
Procura	60	60	80	80	80	

Vejamos agora como interpretar a solução óptima.

A solução óptima transexpede 30 unidades:

10	de 1 → 2
20	de A → B.

Note-se que muito embora a origem 2 só tenha 30 unidades disponíveis, recebe mais 10 unidades da origem 1, enviando depois as 40 unidades para o destino A ficando este destino com 20 unidades e enviando as restantes 20 para o destino B.



A título de curiosidade, se não fosse possível a transexpedição, a solução óptima teria um custo de 190 unidades monetárias contra as 110 unidades monetárias da solução apresentada.

Limite Inferior para a Procura ou Oferta em dado Caminho

Vamos supor que é exigido que seja transportada uma quantidade mínima por dado caminho. Consideremos o seguinte problema:

De	Para A	Para B	Para C	Oferta
1	40	10	20	5000
2	15	20	10	5000
3	20	25	30	4000
Procura	1000	5000	800	

O cliente C exige que pelo menos 500 unidades sejam enviadas da origem 1. Qual a implicação desta restrição na solução óptima?

Vejamos como incorporar esta situação no quadro de transportes:

Fábrica	Posto de Venda			Oferta
	A	B	C	
1	40	10	20	4500
2	15	20	10	5000
3	20	25	30	4000
Procura	1000	5000	300	

5000-500=4500
(500 unidades são reservadas)

800-500=300
(500 unidades são satisfeitas pela origem 1)

Como 500 unidades da procura do cliente C têm de ser fornecidas pela origem 1 então a origem 1 apenas disponibiliza 4500 unidades e o destino C apenas precisa de 500 unidades.

A solução óptima (depois de cativadas as 500 unidades) é apresentada a seguir e tem um custo de 73000 unidades monetárias.

De	Para			Oferta
	A	B	C	
1	0	4500	0	4500
2	1000	500	300	5000
3	0	0	0	4000
Procura	1000	5000	300	

Então o custo total do problema inicial é dado por:

Custo da solução sem as 500 unidades	73000
Reserva de 500 unidades em (1,C) → (500*20)	10000
Custo Total	83000

Conclusão

O método dos transportes é uma ferramenta de trabalho muito importante ao dispor do gestor. Talvez da exposição tenha ficado a ideia do imenso trabalho em resolver problemas de significativa dimensão (milhares de linhas e colunas).

Contudo, o advento de máquinas com potencialidades de cálculo fabulosos (O Computador) vêm ajudar o gestor a resolver problemas que de outra forma seriam impensáveis. Aliás não se concebe a tomada de decisão, nos nossos dias, sem a ajuda de - **O Computador.**

Bibliografia

- Aarvik, O, and Randolph, P "The Application of Linear Programming to the Determination of Transmission Fees in a Electrical Power Network", *Interfaces*, vol 6, Nov, 1975;
- Bodman, E "Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming", *Operations Research*, vol 4, 1956;
- Budnick, Frank S, Mojena R and Vollman Thomas E, "Principles of Operations Research for Management", Richard D Irwin, Inc, Homewood Illinois 60430, USA, 1977;
- Choypeng, P, Puakpong P and Rosenthal, Richard E "Optimal Ship Routing and Personnel Assignment for Naval Recruitment in Thailand", *Interfaces*, vol 16, nº4, Julho-Agosto, 1986, pp 49-52;
- Hillier, F S and Lieberman, G J, *Introduction to Operations Research*, 3rd Edition, San Francisco, Holden-Day, 1980;
- Holladay, J "Some Transportation Problems and Techniques for Solving Them", *Naval Research Logistics Quarterly*, vol 11, 1974;
- Jacobenson, S K "On the Use of Tree-Indexing Methods in Transportation Algorithms", *European Journal of Operational Research 2*, (1978) 54-65;
- Krajewski, Lee J, Larry P. Ritzman, *Operations Management and Student CD Package, 7/E*, Prentice Hall 2005;
- Lee, Sang M, Moore, Laurence and Taylor, Bernard W, *Management Science*, Dubuque, Iowa, Wm C Brown Company Publishers, 1981;
- Moore, Jeffrey H.e Larry R. Weatherford, *Decision Modeling with Microsoft® Excel, 6/E*, Prentice Hall, 2001;
- Murty, Katta G, *Operations Research: Deterministic Optimization Models*, Prentice Hall, 1995;
- Rardin, Ronald L, *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, 1998;
- Render, B Stair, R M and Greenberg, *Cases and Readings in Management Science*, 2nd ed Boston: Allyn and Bacon, Inc, 1990;
- Taha, Handy, *Operations Research: An Introduction, 7/E*, Prentice Hall, 2003;
- Taylor, Bernard, *Introduction to Management Science and Student CD*, 8ªEdição, Prentice-Hall, 2004.

Questões e Problemas

1. Dado o seguinte quadro do problema de transportes determine a solução inicial usando a Método do Canto do Noroeste, Método do Custo Mínimo e o Método de VOGEL e calcule o custo total para cada um.

	A	B	C	Oferta
1	10	9	5	60
2	6	8	7	30
3	4	3	2	60
Procura	40	40	70	150

2. Dado o seguinte quadro e a solução de um problema de transportes determine a solução óptima usando o método *Stepping-Stone.*

	A	B	C	Oferta
1	7	5 30	9 120	150
2	10 100	12	10 100	200
3	6	3 50	14	50
Procura	100	80	220	400

3. Resolva o seguinte problema de transportes:

	1	2	3	Oferta
A	7	10	9	35
B	12	5	4	20
C	8	3	11	60
Procura	40	45	30	115

4. Dado o seguinte problema de transportes:

	1	2	3	4	Oferta
1	7	6	2	12	70
2	3	9	8	7	40
3	10	4	11	5	100
Procura	30	60	90	30	

- Encontre uma solução inicial usando o Método do Canto de Noroeste, o Método do Custo Mínimo e o Método de Vogel. Calcule o custo total para cada caso.
- Usando a solução inicial fornecida pelo VAM, encontre a solução óptima usando o Método de *Stepping-Stone*. Calcule o custo total mínimo para a solução.

5. Dado o seguinte problema de transportes

	1	2	3	4	Oferta
1	500	750	300	450	12
2	650	800	400	600	17
3	400	700	500	550	11
Procura	10	10	10	10	

- Encontre a solução inicial usando o Método do Canto de Noroeste, o Método do Custo Mínimo e o VAM. Calcule o custo total para cada aproximação.
- Usando o VAM como solução inicial, encontre a solução óptima usando o Método MODI.
- Formule este problema como um problema de programação linear.

6. Dado o seguinte problema de transportes:

	1	2	3	Oferta
A	6	9	7	130
B	12	3	5	70
C	4	8	11	100
Procura	80	110	60	

- Encontre uma solução inicial usando o Método do Custo Mínimo;
- Encontre a solução óptima usando o Método de *Stepping-Stone*.

7. O Aço é produzido em três cidades:

Localização	Produção Semanal (ton)
A - Porto	150
B - Braga	210
C - Guarda	320

Estas fábricas fornecem aço para quatro localidades que têm a seguinte procura:

Localização	Procura Semanal (ton)
1 - Faro	130
2 - Setúbal	70
3 - Coimbra	180
4 - Aveiro	240

Foram determinados os seguintes custos de distribuição por tonelada:

	1	2	3	4
A	14	9	16	18
B	11	8	7	16
C	16	12	10	22

Contudo devido a uma greve dos condutores, os carregamentos são presentemente proibidos de Braga para Coimbra.

- Estabeleça um quadro de transportes inicial para este problema e determine a solução inicial. Identifique o método usado para encontrar essa solução?
- Resolve este problema usando o MODI.
- Existem soluções óptimas alternativas? Explique. Se existirem identifique-as?
- Formule este problema como um problema de programação linear.

8. O quadro seguinte representa a solução de um problema de transportes:

	A	B	C	Oferta
1	12	10	6 600	600
2	4 400	15	3	400
3	9 300	7	M	300
4	11	8 500	6 300	800
Fictícia	0 200	0	0	200
Procura	900	500	900	

- É um problema de transportes balanceado ou não balanceado? Explique.
- É uma solução degenerada? Porquê? Se for degenerada explique como pode ser posta na forma apropriada.
- Existe algum caminho proibido para este problema?
- Calcule o custo total para este problema.
- Qual o valor de X_{2B} nesta solução?

9. Dado o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Min } Z = 17X_{11} + 10X_{12} + 15X_{13} + 11X_{21} + 14X_{22} + 10X_{23} + 9X_{31} + 13X_{32} + 11X_{33} + 19X_{41} + 8X_{42} + 12X_{43}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} + X_{13} &= 120\\
X_{21} + X_{22} + X_{23} &= 70\\
X_{31} + X_{32} + X_{33} &= 180\\
X_{41} + X_{42} + X_{43} &= 30\\
X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} &= 200\\
X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} &= 120\\
X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} &= 80\\
X_{ij} &\geq 0
\end{aligned}$$

- Estabeleça o quadro de transportes para este problema e determine a solução inicial usando o VAM.
- Resolva o problema usando o Método de *Stepping-Stone*.

10. Uma empresa produz motores diesel em quatro localidades: Porto, Setúbal, Leiria e Faro. A empresa é capaz de produzir os seguintes motores por mês:

Fábrica	Produção
1. Porto	5
2. Setúbal	25
3. Leiria	20
4. Faro	25

Três firmas de camiões que compram os motores têm a seguinte procura nas suas fábrica em três cidades:

Firmas	Procura
A. Guarda	10
B. Coimbra	20
C. Aveiro	15

Os custos de transporte (em euros), por motor, de dada origem para dado destino são:

	A	B	C
1	7	8	5
2	6	10	6
3	10	4	5
4	3	9	11

A firma de Coimbra não aceita os motores feitos em Setúbal e a firma de Aveiro não aceita motores feitos em Leiria: por isso, estes caminhos são proibidos.

- Estabeleça o quadro de transportes para este problema. Encontre a solução inicial usando o VAM.
- Encontre a solução óptima utilizando o Método de *Stepping-Stone*. Calcule o custo mínimo total.
- Formule este problema como um modelo de programação linear.

11. Uma empresa de papelão planeia a sua produção com três meses de avanço. A empresa tem uma capacidade produtiva de 1300 caixas por mês em tempo regular. O custo de produção de uma unidade em tempo regular é de €4 por caixa. Usando trabalho extraordinário, podem ser fabricadas até um máximo de 500 caixas por mês a um custo de €6. Custa €3 por mês manter uma caixa em armazém. As vendas mensais para os próximos três meses são as seguintes: 1000, 1200 e 1800 caixas, respectivamente. A penalização por cada caixa não vendida no fim do terceiro mês é de €5.

    - A empresa de papelão pretende determinar um plano óptimo de produção, que minimize os custos totais de produção e armazenagem e satisfaça a procura mensal.
    - Formule este problema como um modelo de transportes.

12. A empresa MÉDI aluga equipamento especializado de Raio-X para os hospitais. Existem correntemente três máquinas localizadas no Porto, duas localizadas em Coimbra e três em Leiria. O hospital da Guarda precisa de duas máquinas; o hospital da Covilhã e de Castelo Branco precisam de duas máquinas cada um. Os custos de transporte de uma máquina entre os hospitais das diversas cidades são dados na tabela seguinte:

	Guarda	**Covilhã**	**Castelo Branco**
Porto	1600	1800	2500
Coimbra	900	1000	1800
Leiria	1400	1000	400

    - Desenhe uma rede de distribuição indicando a oferta e a procura e outros dados relevantes (se apropriado junte células fictícias para obter um problema balanceado).
    - Formule um modelo matemático para determinar quantas máquinas devem ser enviadas de cada cidade para cada hospital para se incorrer no custo mínimo.
    - Estabeleça o quadro de transportes.
    - Encontre uma solução inicial usando o Método do Custo Mínimo.
    - Execute o Método de *Stepping-Stone* para encontrar a solução óptima.
    - Use um programa de computador para encontrar a solução óptima.

13. A empresa MÉDI acabou de receber um pedido adicional, de Guimarães, para duas das suas máquinas. O transporte de uma máquina para Guimarães custa: €1300 do Porto, €1400 de Coimbra e €2700 de Leiria. Use um programa de computador para resolver este problema assumindo que qualquer procura que não possa ser satisfeita não será penalizada. Como é que esta alteração afecta a solução do problema anterior? Quem é que recebe máquinas de Raio-X e quem não?

14. A empresa de carros CAR, precisa de enviar até um total de 200 carros por camiões e 600 por comboio da sua fábrica na cidade A para os seus vendedores nos locais 1, 2, 3, e 4. O custo (em euros) de envio de um carro para cada um dos vendedores, por camião, ou por comboio, bem como a respectiva procura é dada na seguinte tabela:

	1	2	3	4
Camião	30	20	50	60
Comboio	45	30	75	90
Procura	300	100	250	150

- Desenhe uma rede de distribuição indicando a oferta apropriada, a procura e outros dados relevantes (se apropriado junte células fictícias para obter um problema balanceado).
- Como gerente de logística desta empresa formule um modelo matemático para determinar como enviar os carros para os distribuidores de modo a minimizar o custo total de transporte.
- Desenhe o quadro de transportes.
- Encontre uma solução básica inicial usando o Método do Custo Mínimo.
- Execute o algoritmo de *Stepping-Stone* para obter a solução óptima.
- Use um programa de computador para obter a solução óptima.

15. A gestão da empresa CAR, acabou de receber uma encomenda adicional de 75 carros de um seu vendedor na localidade 5. O custo de transporte por cada carro para este distribuidor é de €28 por camião e de €42 por comboio. Use o programa de computador para resolver esta nova situação assumindo que qualquer procura que não seja satisfeita incorre numa penalização de €50 por unidade. Como é que esta mudança afecta a solução óptima do problema anterior? Quais os distribuidores que vêm a sua procura satisfeita e quais os que não?

16. Considere um problema de transportes balanceado em que a função objectivo é a maximizar em vez de minimizar.
    - Encontre uma solução viável inicial modificando os passos do Método do Custo Mínimo.
    - Que modificações precisam de ser feitas no Método de *Stepping-Stone* para obter um plano de distribuição que maximize em vez de minimize a função objectivo?

17. A empresa petrolífera Hexxon tem seis consultores internacionais, três dos quais estão correntemente localizados nos EUA, dois na Rússia e um na Nigéria. A Arábia Saudita (AS) requisitou dois consultores por dois meses a uma taxa de €4200. A

Venezuela (V) também requisitou um consultor por um mês a uma taxa de €4000 cada. A Indonésia (I) requisitou três consultores por um mês a uma taxa de €4000 cada. As despesas mensais por consultor são de €1400 na Arábia Saudita, 1000 na Venezuela e 700 na Indonésia. A tabela seguinte mostra o custo de uma viagem de ida e volta (em euros) de avião para os consultores:

	AS	V	I
EUA	1800	800	2000
Rússia	1600	1800	1700
Nigéria	1300	1200	1500

- Formule uma rede de distribuição indicando a oferta, a procura e outros dados relevantes, criando um problema balanceado.
- Formule um modelo matemático para determinar em como obter o número de consultores requerido em cada país e maximizar o lucro total (receitas menos despesas, incluindo o custo do bilhete de avião).
- Estabeleça o quadro inicial do problema de transportes.
- Encontre uma solução inicial adaptando o Método do Custo Mínimo.
- Execute o Método de *Stepping-Stone* aplicado a um problema de maximização para encontrar a solução óptima.
- Use um programa de computador para encontrar a solução óptima.
- A Arábia Saudita acabou de cancelar o seu pedido de um consultor. A gestão da Hexxon sabe que um consultor residente na Rússia obtém um lucro mensal de €1000, um consultor na Nigéria obtém €800 e um consultor nos EUA não obtém nada. Use o programa de computador para resolver este problema modificado. Como é que esta informação altera a solução óptima obtida anteriormente?

18. A empresa World OIL recebe crude do Médio Oriente nas suas instalações em Marselha e Venice. O petróleo é depois enviado através de um oleoduto com estações de elevação em Dijon, Bern, Reims e Luxemburgo para tanques de armazenamento em Paris, Bruxelas e Colónia. As distâncias aproximadas, em quilómetros, entre os pontos ligados pelo oleoduto são dadas nas tabelas seguintes:

	Dijon	Bern
Marselha	475	450
Venice	–	425

	Reims	Luxemburgo
Dijon	240	275
Bern	375	325

	Paris	Bruxelas	Colónia
Reims	130	175	–
Luxemburgo	–	150	140

Estes meses estão disponíveis 250000 barris de petróleo em Marselha e 150000 em Venice. O tanque de armazenamento em Paris precisa de receber 200000 barris e as facilidades em Bruxelas e Colónia precisam cada uma de 100000 barris.

- Desenhe uma rede de distribuição indicando a procura, a oferta e outros dados relevantes.
- Formule um modelo matemático para determinar como é que o crude deve ser enviado entre estas facilidades para minimizar o número total de quilómetros que o crude tem de percorrer (isto é, a soma do número de barris de crude vezes o número de quilómetros que percorre).

19. A empresa de trajes académicos TRAJ, comprometeu-se a fornecer as capas para a cerimónia de graduação para quatro colégios locais. O Colégio A tem a sua cerimónia Sexta-Feira à noite graduando 700 estudantes; o colégio B tem a cerimónia Sábado de manhã graduando 600 estudantes; o colégio C tem a cerimónia Sábado à tarde graduando 700 estudantes. O colégio D tem a cerimónia Domingo de tarde graduando 500 estudantes.

A empresa TRAJ tem correntemente 400 conjuntos de trajes académicos. Pretende minimizar o custo de fornecer os trajes aos colégios. A TRAJ pode ter os trajes de Sexta-Feira à noite limpos e prontos para Sábado à noite a um custo de €600 por conjunto. Os trajes de Sábado de manhã podem ser limpos para Domingo de manhã ao mesmo preço. Um conjunto de trajes custa €20000.

- Formule este problema como um problema de transportes identificando todas as origens, os destinos e os respectivos custos.
- Resolve este problema como um problema de transportes.

20. Uma empresa de distribuição tem dois consumidores principais e três fontes de fornecimento. O preço unitário, a oferta e a procura, entre cada centro de fornecimento e cada consumidor é dado na tabela seguinte:

	1	2	Oferta
1	-1	3	300
2	1	6	400
3	1	5	900
Oferta	800	500	

Note que o consumidor 1 tem fortes preferências pelo fornecedor 1 e estará disposto não apenas a suportar todos os custos de transporte como a pagar ainda um prémio de uma unidade monetária por cada unidade de produto vinda do fornecedor 1.

- A gestão de topo da empresa sente que é óbvio que o centro de fornecimento 1 deve enviar todos os produtos disponíveis para o consumidor 1. Pensa ser assim tão óbvio? **Sugestão:** obtenha a solução correspondente ao custo mínimo. Explore se existem soluções alternativas óptimas onde nem todas as

300 unidades disponíveis no centro de fornecimento 1 são atribuídas ao consumidor 1.

- Assuma que o consumidor 2 está localizado numa área onde todos os carregamentos são sujeitos a uma taxa definida como uma percentagem do custo do produto. Esta taxa afectará a solução encontrada na alínea a)?
- Ignore a alínea b). Qual será a solução óptima para o problema original se o centro de fornecimento 1 aumentar a disponibilidade de produto de 300 para 400 unidades?

21. Considere o seguinte problema: (problema de minimização)

Origens	**Destinos**			**Oferta**
A	10	8	4	45
B	9	5	7	50
C	3	6	9	45
D	5	7	6	30
Procura	90	30	50	

- Encontre uma solução inicial viável e calcule o seu custo utilizando:
  - Regra do Canto de Noroeste
  - Método de VOGEL
- Comente a qualidade da solução encontrada na alínea a).
- Comente a seguinte afirmação: "O Método de VOGEL conduz sempre a uma solução básica inicial viável melhor do que a Regra do Canto de Noroeste pois considera os custos nas suas decisões de atribuição".
- Encontre a solução óptima:
  - Usando a Regra do Canto de Noroeste e depois o Método de *Stepping-Stone*. Especifique o valor da solução óptima.
  - Usando o Método de Vogel e depois o Método MODI. Especifique o valor da solução óptima.
- Qual é o custo adicional se a gestão insistir em enviar 10 unidades de C para 1?
- Qual o custo adicional se a gestão insistir em enviar 10 unidades de C para 2?
- Qual o custo adicional que a gestão incorre se forem enviadas 15 unidades de D para 3?
- Se em vez de custos os valores apresentados representassem lucros calcule a solução óptima para o correspondente problema de maximização usando o método do Canto de Noroeste e o Método de *Stepping-Stone*.

22. Uma dada empresa distribui um produto das suas três fábricas para três armazéns. Os dados considerados relevantes são apresentados na tabela seguinte:

Fábrica	Armazém			Oferta
	1	2	3	
A	12	11	7	300
B	8	6	14	200
C	9	10	12	150
Procura	200	200	250	

Cada fábrica e cada armazém podem constituir um ponto intermédio de distribuição para outra origem ou destino, o que acarreta os seguintes custos unitários:

De	Para A	Para B	Para C
A	0	14	8
B	3	0	5
C	7	10	0

De	Para 1	Para 2	Para 3
1	0	8	3
2	1	0	2
3	7	2	0

De	Para A	Para B	Para C
1	2	1	11
2	6	5	3
3	10	9	11

- Formule e resolva este problema como um modelo de transexpedição.

23. Uma empresa produz um produto, que é armazenado em três armazéns diferentes. A empresa distribui o seu produto a quatro retalhistas. O produto pode ser enviado entre os armazéns, entre os retalhistas, entre armazéns e os retalhistas mas não podem ser devolvidos dos retalhistas para os armazéns.

A quantidade que pode ser fornecida entre cada armazém e a quantidade necessária por cada retalhista bem como os custos unitários (em euros) são apresentados nas tabelas seguintes:

Armazém	Retalhista 1	Retalhista 2	Retalhista 3	Retalhista 4	Oferta
A	10	14	10	5	80
B	12	9	6	7	120
C	7	11	8	13	110
Procura	50	100	100	60	

Armazém	Armazém A	Armazém B	Armazém C
A	0	4	10
B	5	0	9
C	7	3	0

Retalhista	Retalhista 1	Retalhista 2	Retalhista 3	Retalhista 4
1	0	7	5	8
2	7	0	6	5
3	4	5	0	7
4	9	6	4	0

- Formule e resolva este problema como um modelo de transexpedição.

24. Uma empresa de distribuição tem três fontes de fornecimento A, B e C e três destinos 1, 2 e 3, com determinada procura. Os custos unitários (em euros) bem como a procura são dados na tabela seguinte:

De	Para			Oferta
	1	2	3	
A	5	4	4	600
B	7	5	2	800
C	3	4	6	300
Procura	200	1000	500	

Contudo, o bem, para além de poder ser enviado directamente das origens para os destinos, também pode enviado entre as origens, entre os destinos e entre os destinos e as origens. Os custos unitários para estes caminhos são os seguintes:

De	Para		
	A	B	C
A	0	8	7
B	9	0	4
C	8	3	0

De	Para		
	1	2	3
1	0	6	8
2	7	0	5
3	6	7	0

De	Para		
	A	B	C
1	6	5	4
2	6	3	5
3	7	4	6

- Formule e resolva este problema como um modelo de transexpedição.