ISSN 1645-8281

Instituto Politécnico da Guarda
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Programação por Metas

Amândio Pereira Baía

estg
escola superior de tecnologia e gestão
INSTITUTO POLITÉCNICO DA GUARDA

Ensino de qualidade na cidade mais alta

Instituto Politécnico da Guarda

Ficha Técnica:

Colecção de Manuais da ESTG

Título:
"Programação por Metas"

Autoria:
Professor Doutor Amândio Baía

Edição:
Escola Superior de Tecnologia e Gestão da Guarda

Impressão:
Serviço de Artes Gráficas e Reprografia do IPG

Tiragem:
100 Exemplares

ISSN 1645-8281

Outubro 2006

PROGRAMAÇÃO POR METAS

Amândio Baía

Sobre o Autor

Amândio Pereira Baía
Professor da Área de Gestão
Instituto Politécnico da Guarda

Licenciado em Gestão	PORTUGAL
MSc in Industrial Management	USA
PhD in Statistics & Operational Research	ENGLAND

Eleito Sócio da BETTA GAMMA SIGMA

BETTA GAMMA SIGMA

is the only honorary society in the field of Business Administration recognized by the American Assembly of Collegiate Schools of Business. Election to membership in BETTA GAMMA SIGMA is the highest scholastic honor that a student in Business Administration can win.

Instituto Politécnico da Guarda
Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Av Sá Carneiro
6300 GUARDA
Portugal

À Edite

À Ana Teresa

A tantos outros ....

Muita Obrigada

Prefácio

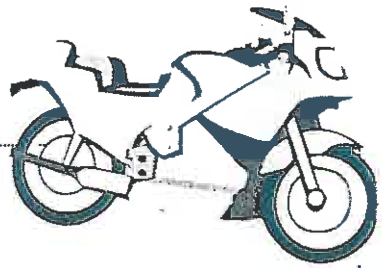
Apenas uma menção especial a todos os alunos a quem leccionei, talvez a razão de ser destes apontamentos.

Índice

Introdução

Muitas decisões da vida real, são caracterizadas por objectivos múltiplos em vez de um único objectivo.

Estes objectivos podem ser complementares, mas a maior parte das vezes são conflituosos e incomensuráveis. Por exemplo, um construtor de motas, gostará de produzir uma mota que custe menos de €10000, tenha 120 cavalos de potência e gaste aos 100 quilómetros menos do que 3 litros de gasolina.



Objectivos - Metas

- Potência... 120CV
- Gasto...3L/100kms
- Custo...€10000

Consideremos, os objectivos da potência e do consumo. Quanto maior for a potência maior será o consumo, logo estes dois objectivos são conflituosos. Além disso estes dois objectivos são incomensuráveis, pois a potência e o consumo são medidos em diferentes escalas ou dimensões.

A empresa das motas abraça uma decisão complexa, pois os objectivos que se propõe atingir, dadas as suas capacidades e os recursos disponíveis, é inviável devido às metas serem incomensuráveis e conflituosas.

Este problema torna-se ainda mais complexo em situações de tomada de decisão sociais. Suponha, por exemplo, que se pretende construir uma lixeira em dada localidade. Alguns objectivos a considerar são a capacidade, a fiabilidade, os efeitos ambientais: impactos biológicos da localização, condições de saúde e de segurança da população residente na vizinhança, efeitos económicos e custo do sistema.

Muitos destes objectivos, além de serem conflituosos e incomensuráveis, são "confusos" – impacto biológico, por exemplo. De facto, este objectivo, apenas pode ser medido de forma subjectiva.

Incomensuráveis

Que não se exprimem na mesma unidade de medida (litros, euros, quilómetros, cavalos ...).

Programação Linear *versus* Programação por Objectivos

Na Programação Linear (PL), todos os objectivos da gestão devem ser incluídos na função objectivo e reduzidos a um único critério agregativo de dimensão. Por exemplo, maximizar o lucro total – que é igual à soma dos lucros dos produtos individuais – ou minimizar o custo total.

Não é, contudo, possível muitas das vezes reduzir todos os objectivos de uma organização a um formato deste tipo. O que se faz é seleccionar apenas um destes objectivos incomensuráveis como Função Objectivo.

O objectivo a incorporar na função objectivo deve ser o menos importante. Os outros devem ser enquadrados como restrições no modelo de PL. Os objectivos, materializados nas restrições, têm, desta forma, uma prioridade absoluta sobre o objectivo incorporado na Função Objectivo.

O método do *simplex* escolhe, de entre o conjunto das soluções viáveis (admissíveis – satisfazem todas as restrições do problema) a solução que satisfaça todas as restrições dos recursos e ao mesmo tempo optimize a função objectivo. Se não existir uma solução viável o objectivo (menos importante) presente na função objectivo será descartado e um novo modelo deve ser formulado.

A nova formulação integrará na função objectivo a meta menos importante seguinte (obtida a partir das restrições). Se a solução for novamente inviável continuar-se-á esta metodologia até se encontrar uma solução viável.

Este tipo de modelo, requer que a solução óptima satisfaça todas as restrições e implica que todos os objectivos especificados no modelo como restrições tenham a mesma importância. E mais, têm absoluta prioridade sobre os objectivos presentes na função objectivo.

Uma nova técnica de análise de problemas que envolvem permite a atribuição de recursos escassos foi desenvolvida como suplemento da Programação Linear - é chamada de **Programação por Objectivos (PO)**.

A PO permite ao decisor incorporar na formulação do problema objectivos que não são convertíveis para uma dimensão única. Também é mais flexível do que a PL no sentido em que permite especificar objectivos conflituosos e incomensuráveis e obter-se uma solução óptima em termos de prioridade dos objectivos da gestão.

A PL em determinadas circunstâncias conduz a uma solução impossível. A PO não tem muitas das limitações da PL e mantém a característica de facilidade de resolução recorrendo ao uso do algoritmo de *simplex*.

A PO fornece a solução de problemas que têm objectivos múltiplos, conflituosos e incomensuráveis, ordenados de acordo com as prioridades definidas pela gestão. A PO apareceu com o trabalho de Charnes e Cooper (1961), que procuravam uma maneira de resolver PL inviáveis, resultantes de restrições conflituosas.

A PO é uma extensão da Pl Formular um modelo de PO semelhante a formular um model de PL. O primeiro passo consist em definir as variáveis de decisão.

Depois, todos os objectivos d gestão devem ser priorados. Mesm que a gestão não consiga enumer los numa escala cardinal pode se usada uma escala ordinal.

Exemplos de objectivos conflituosos podem ser encontrados em organizações que pretendam:

- Maximizar o lucro e aumentar os salários a pagar aos trabalhadores;
- Actualizar a qualidade dos produtos e reduzir o preço de custo dos produtos;
- Pagar maiores dividendos aos accionistas e reter lucros para crescimento;
- Aumentar as vendas e não aumentar as horas dedicadas à produção;
- Reduzir o crédito aos clientes e aumentar as vendas.

Basicamente a PO consiste em formular uma função objectivo em que a optimização se torne tão próxima quanto o possível dos objectivos especificados. Ijiri (1965) e Jaaskelainen (1969) aumentaram e refinaram a técnica da PO. Uma vasta variedade de aplicações de PO pode ser encontrada em Lee (1972).

Apresentamos apenas algumas das aplicações da PO:

- Planeamento da agricultura no Egipto (Bazarra e Borzahev 1981);
- Critérios múltiplos de atribuição de autocarros, nas escolas (Lee e Moore, 1977);
- Planeamento e admissões para as forças armadas dos Estados Unidos (Pares et al, 1980);
- Formular políticas de rotatividade de sangue para a Cruz Vermelha Americana (Kendall e Lee, 1980);
- Critérios Múltiplos de planeamento de transportes escolares (Drake e Joiner, 1981).

Em situações do mundo real, os objectivos estabelecidos pelo decisor apenas são conseguidos a expensas de outros objectivos. Muitos destes objectivos são incompatíveis (incomensuráveis).

Se o decisor conseguir ordenar os objectivos em termos da importância para a organização, o problema pode ser formulado e resolvido como um problema de PO. A característica distintiva da PO é que os objectivos são satisfeitos numa sequência ordinal. Isto é, os objectivos devem ser priorados pelo decisor em função da sua importância e satisfeitos sequencialmente pelo algoritmo de solução.

Os objectivos de prioridade mais baixa apenas são considerados depois de os de prioridade mais alta terem sido considerados. Obviamente, que nem sempre é possível atingir cada objectivo de acordo com a pretensão do decisor.

O decisor pretende conseguir um *nível satisfatório* dos múltiplos objectivos em vez do melhor resultado para um único objectivo como na PL. A PO é um procedimento *satisfatório*, dito por outras palavras *faz o melhor que pode.*

A noção fundamental da PO consiste em incorporar no modelo todos os objectivos da gestão. Na PO em vez de se pretender maximizar ou minimizar a função objectivo directamente, tal como na PL, pretende minimizar-se os desvios dos objectivos dadas certas restrições de recursos.

As variáveis de decisão, chamadas de *folga* ou *surplus* na PL, assumem na PO um outro conceito. São fraccionadas em desvios negativos e positivos de cada objectivo. A Função Objectivo torna-se na minimização destes desvios cumprindo a estrutura de prioridade que lhes foi atribuída.

Variável Folga – mede a quantidade de dado recurso que sobra do processo produtivo.

Variável *Surplus* – mede o que está a mais além do mínimo necessário.

Visão Geral da Programação por Objectivos

Como vimos, a PO trabalha não só com múltiplos objectivos, mas também com objectivos que são incomensuráveis e contraditórios, que não se tentam **optimizar** mas apenas **satisfazer**. Cada situação é vista não como um problema que se pretende optimizar mas sim como uma situação que deve ser *gerida o melhor possível*.

- Uma forma abreviada do estabelecimento de objectivos pode assemelhar-se a:

• Prioridade 1 - (P_1)	– Conseguir um volume de vendas na ordem dos €100000;
• Prioridade 2 - (P_2)	– Não utilizar mais de 100 horas no departamento de produção;
• Prioridade 3 - (P_3)	– O recurso a trabalho extraordinário deve ser evitado o mais possível.

- Como a PO usa uma aproximação de *satisfação*, é natural que cada objectivo não seja atingido na totalidade. O resultado final pode desviar-se do que idealmente fixámos. A quantidade de que cada objectivo não é atingido - pode ser para mais ou para menos – é referida como variável de desvio.

Como o decisor não sabe, antes de determinar a solução, se a diferença é para mais ou para menos, então ambas as possibilidades devem ser consideradas. Por isso, ambas as varáveis de desvios, para mais (d_i^+) e para menos (d_i^-) devem ser incluídas com a restrição correspondente a cada objectivo.

É importante realçar que para cada objectivo em particular, apenas um dos desvios pode acontecer. O objectivo é alcançado por excesso (d_i^+) ou por defeito (d_i^-) – muito embora seja possível que ambas as variáveis sejam zero se o objectivo for alcançado na sua plenitude (exactamente).

As variáveis de desvios podem ser vistas numa óptica similar às variáveis *folga* e *surplus* incluídas nas restrições dos recursos na formulação de problemas de PL. Por isso, todas as restrições da PO são escritas como igualdades.

Exemplo: Uma empresa vende 2 produtos, A e B, com um lucro de €100 e €200, respectivamente. Se a primeira prioridade P_1, for

Como não podemos ter em simultâneo um desvio por excesso e por defeito então:

- $d_i^- * d_i^+ = 0$

o que significa que pelo menos uma destas variáveis é zero.

conseguir um lucro de €50000, a correspondente restrição associada a este objectivo é a seguinte:

- $100A + 200B + d_1^- - d_1^+ = 50000$

Onde

d_1^+ representa a quantidade que excede os €50000
d_1^- representa a quantidade que falta para os €50000

Então se a solução tomar um valor;

- de €60000 então $d_1^+ =$ €10000 e $d_1^- =$ €0 desvio por excesso
- de €45000 então $d_1^- =$ €5000 e $d_1^+ =$ €0 desvio por defeito
- de €50000 então $d_1^+ = d_1^- =$ €0

- Na PO, nem todos os objectivos têm de ser expressos como restrições. Em vez disso, é possível que a PO contempla restrições de objectivos e restrições de recursos, sendo estas tratadas de forma idêntica à da PL.

- A função objectivo da PL pode ser a maximizar ou a minimizar. Todas as funções objectivo de um problema de PO têm seguinte característica comum: *minimizar a soma dos desvios relevantes* dentro da estrutura de prioridade estabelecida para o problema.

  Apenas as variáveis de desvios consideradas prejudiciais para o processo de minimização são consideradas relevantes e incluídas na função objectivo.

  Por exemplo, se um dos objectivos for minimizar o excesso de gastos em investimento, além do planeado, tipicamente não se deve incluir a variável d_i^-, pois esta variável não é importante, neste caso.

Restrição Tipo	Variável de Desvio na Função Objectivo
$\leq$	d_i^+
$=$	d_i^+, d_i^-
$\geq$	d_i^-

  É simples saber qual a variável de desvio a incluir com base no tipo de restrição da meta em consideração: $\leq$, = ou $\geq$.

- Os factores prioritários e as diferentes ponderações de importância também são atribuídas a cada uma das variáveis de desvios na função objectivo. As ponderações de importância, embora opcionais, apenas podem discriminar entre as variáveis de desvios, dentro do mesmo nível de prioridade.

  A não ser que seja especificado um tratamento diferente os valores das ponderações são 1.0. O factor de prioridade serve como uma salvaguarda de que um objectivo pode ser melhorado apenas se o objecto de prioridade mais alta não for piorado.

Formulação do Modelo de Programação por Objectivos

Função Objectivo

Minimizar $$Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{m} P_k (w_{iK}^{+} d_i^{+} + w_{iK}^{-} d_i^{-})$$

Sujeito a:

Restrições dos objectivos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^{-} - d_i^{+} = b_i \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

Restrições dos Recursos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i \qquad \text{para } i = m+1, \ldots, m+p$$

$$X_j, d_i^{+}, d_i^{-} \geq 0 \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad i = 1, \ldots, m$$

onde:

$P_k =$ nível de prioridade da restrição K (P_1 é o nível de prioridade mais alto, P_2 é a segunda prioridade mais alta e assim sucessivamente);
$w_i^{+} =$ peso relativo da importância da sobre-realização da variável d_i^{+} no nível de prioridade k;
$w_i^{-} =$ peso relativo da importância da sub-realização da variável d_i^{-} no nível de prioridade k;
m = número de restrições dos objectivos;
p= número de restrições de recursos;
n= número de variáveis de decisão;
k= número de níveis de prioridade.

Os pesos de importância w_i^{+}, w_i^{-} apenas são usados quando existem dois desvios indesejáveis para a mesma prioridade. Como os factores de prioridade são decisivos – os objectivos mais altos devem ser satisfeitos o mais possível antes de se equacionarem os objectivos de prioridade mais baixa – não existe interacção ou trocas entre as restrições dos objectivos e, por isso, as ponderações não têm qualquer efeito fora do objectivo específico para que foram aplicadas.

Muito embora P_k não seja uma variável ou um parâmetro (não lhes são atribuídos valores numéricos) a relação matemática entre eles podem ser expressa como:

$$P_k >>> P_{k+1}$$

o que significa que P_k é muito mais importante do que P_{k+1} e não existe qualquer número, c, que possa ser multiplicado pelo factor de prioridade mais baixo e aumentar a sua classificação, isto é:

$$P_k >>> c\, P_{k+1}$$

O uso destes parâmetros na formulação de problemas de PO é similar à técnica usada na formulação de problemas de PL.

Prioridades

- $P_1 >>> P_2 >>> \ldots >>> P_k$
- $P_1 >>> 3P_2 >>> \ldots >>> 9P_k$

Formulação de Modelos de Programação por Objectivos

Vamos agora apresentar alguns exemplos, mais comuns, de formulação de problemas de programação linear.

Modelo com um único Objectivo

Aplicação Prática – Exemplo 1

A empresa LEVEC produz dois tipos de fogões de cozinha: Modelo A – Electrónico e Modelo B – Mecânico. Neste momento existe uma grande procura pelos fogões e a LEVEC consegue vender todos os fogões que produz.

A empresa consegue um lucro de €100 na venda do Modelo A e €150 na venda do Modelo B. A capacidade produtiva diária nas duas secções de produção é, para o modelo A e B, apresentada na tabela seguinte.

Tipo de Fogão	Horas de Processamento por Fogão	
	Montagem de Fios	Montagem Final e Testes
Modelo A	8	4
Modelo B	4	4
Horas disponíveis por dia	160	120

Assuma que, neste momento, a LEVEC apenas está interessada em maximizar o lucro total associado com a produção destes dois tipos de fogão.

Definição das Variáveis:

A = número de fogões do modelo A a fabricar diariamente
B = número de fogões do modelo B a fabricar diariamente

Max Z=	$100A + 150B$	(lucro)
Sujeito a:		
	$8A + 4B \leq 160$	(montagem de fios)
	$4A + 4B \leq 120$	(montagem final e testes)
	$A, B \geq 0$	

A solução óptima deste problema é a seguinte:

$A = 0$	fogões do modelo A a produzir por dia
$B = 30$	fogões do modelo B a produzir por dia
$Z = €4500$	lucro por dia

Aplicação Prática – Exemplo 2

Assuma agora que a LEVEC está pensando em fazer um investimento para melhorar a eficiência dos dois processos de produção. Esta decisão visa não só a maximização do lucro, mas também alcançar um nível satisfatório de lucro durante o período do investimento. A LEVEC estabeleceu como meta:

- Um lucro diário de €5000 durante o período de investimento.

Neste momento, a LEVEC pretende determinar qual a combinação óptima que lhe permite atingir, no mínimo, o objectivo do lucro diário.

Este novo problema pode, agora, ser endereçado como um problema de PO. Para incorporar o objecto de se obterem €5000 de lucro diário, temos de definir, em primeiro lugar, as seguintes variáveis de decisão:

$d_1^+ =$ sobre-atingimento do lucro diário (isto é, o valor pelo qual o lucro diário actual excede a meta dos €5000 diários)

$d_1^- =$ sub-atingimento do lucro diário (isto é, o valor pelo qual o lucro diário actual excede a meta dos €5000 diários)

O objectivo do lucro diário é agora escrito no modelo de PO, usando as variáveis de desvios:

$100A + 150B + d_1^- - d_1^+ = 5000$ (restrição da meta do lucro)

O modelo completo pode ser formulado:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min } Z = & d_1^- & \text{(lucro)} \\
\text{Sujeito a:} & & \\
& 8A + \quad 4B \leq 160 & \text{(montagem de fios)} \\
& 4A + \quad 4B \leq 120 & \text{(montagem final e testes)} \\
& 100A + 150B + d_1^- - d_1^+ = 5000 & \text{(restrição da meta do lucro)} \\
& A,\ B,\ d_1^+,\ d_1^- \geq 0 &
\end{array}
$$

Restrições estruturais ou dos recursos

A função objectivo contem apenas uma variável de desvio d_1^-, que reflecte o sub-atingimento do lucro diário de €5000. A LEVEC pretende minimizar o valor de d_1^-, ou seja, quer que esta variável tome o valor zero tanto quanto o possível.

Observe, finalmente, que as duas restrições dos recursos (restrições estruturais) do modelo de PO são as mesmas restrições do modelo original de PL.

Modelo com vários objectivos – de igual importância

Aplicação Prática – Exemplo 3

Assuma agora que a LEVEC reconsiderou o seu problema de produção e decidiu que pretende alcançar dois objectivos de igual importância.

Pretende atingir a meta de vender, no mínimo, 15 fogões do modelo A e 15 fogões do modelo B. Em ambos os casos pretende minimizar o sub-atingimento das respectivas metas.

A LEVEC agora pretende determinar, para o mesmo período de produção, a combinação produtiva, que atinge ou melhor satisfaz, ambos os objectivos de vendas.

Para a nova situação, comecemos por definir as novas variáveis de decisão:

$d_1^+ =$ sobre-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo A
$d_1^- =$ sub-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo A

$d_2^+ =$ sobre-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo B
$d_2^- =$ sub-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo B

$$
\begin{array}{llll}
\text{Min } Z= & d_1^- + d_2^- & & \\
\text{Sujeito a:} & & & \\
& 8A + 4B & \leq 160 & \text{(montagem de fios)} \\
& 4A + 4B & \leq 120 & \text{(montagem final e testes)} \\
& A + d_1^- - d_1^+ & = 15 & \text{(objectivo de vendas – modelo A)} \\
& B + d_2^- - d_2^+ & = 15 & \text{(objectivo de vendas – modelo B)} \\
& A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 & &
\end{array}
$$

Note que, na função objectivo, apenas aparecem as variáveis de desvios d_1^- e d_2^- e a ambas é atribuída igual importância (ponderações de um), o que significa que para a LEVEC é tão importante o sub-atingimento de uma meta como de outra.

- **Modelo com vários objectivos – objectivos classificados como prioritários (objectivos não conflituosos)**

Aplicação Prática – Exemplo 4

Suponha agora que a LEVEC, decidiu que pretende atingir, no mínimo, €2400 de lucro diário e vender no mínimo 5 unidades do modelo A e 15 unidades do modelo B. Além disso decidiu que, aos três objectivos, deve ser dada a seguinte prioridade:

	Objectivo	Prioridade
1	Conseguir um lucro diário, mínimo de €2400	P_1
2	Vender no mínimo 15 unidades do modelo B	P_2
3	Vender no mínimo 5 unidades do modelo A	P_3

Observe que estes três objectivos são incomensuráveis, pois não podem ser expressos na mesma unidade de medida. Esta classificação ordinal é chamada de factores de prioridade. Estes factores prioritários têm a seguinte relação:

$P_1 >>> P_2 >>> \ldots >>> P_i >>> P_{i+1}$

onde $>>>$ significa "muito maior do que"

A classificação de prioridade é absoluta, isto é, o objectivo P_1 é muito mais importante do que o objectivo P_2, ou seja, P_2 nunca será atingido antes que o P_1 seja alcançado o mais possível.

Em termos matemáticos, significa que se *n* for um número o maior possível, um objectivo de prioridade mais baixa não pode ser tão importante como um objectivo de prioridade mais baixa ($P_i > nP_{i+1}$).

Variáveis de desvios como restrições de objectivos

Uma empresa produz dois produtos A e B, que demoram cada um 1 hora na secção de produção. Existem, semanalmente, disponíveis 75 horas de tempo de produção.

- $A + B + d_1^- - d_1^+ = 75$

Neste caso, o trabalho extraordinário é representado pela variável d_1^+.

Uma nova meta exige que o tempo extraordinário não pode exceder 20 horas semanais.

- $d_1^+ + d_2^- - d_2^+ = 20$

Muito embora esta nova equação seja perfeitamente aceitável na PO, é possível usar outra maneira de enquadrar esta restrição em termos das variáveis de decisão:

- $A + B + d_2^- - d_2^+ = 75+20=95$

A LEVEC, pretende determinar agora, para o mesmo período de produção, a combinação produtiva, que melhor satisfaz os três objectivos.

Vamos em primeiro lugar definir as variáveis:

$d_1^+ =$ sobre-atingimento do objectivo do lucro diário
$d_1^- =$ sub-atingimento do objectivo do lucro diário

$d_2^+ =$ sobre-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo B
$d_2^- =$ sub-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo B

$d_3^+ =$ sobre-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo A
$d_3^- =$ sub-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo A

Min Z=	$P_1d_1^- + P_2d_2^- + P_3d_3^-$		
Sujeito a:			
	$8A + 4B$	≤ 160	(montagem de fios)
	$4A + 4B$	≤ 120	(montagem final e testes)
	$100A + 150B + d_1^- - d_1^+$	$= 2400$	(objectivo P_1)
	$B + d_2^- - d_2^+$	$= 15$	(objectivo P_2)
	$A + d_3^- - d_3^+$	$= 5$	(objectivo P_3)
	$A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^- \geq 0$		

A função objectivo para este modelo indica que a gestão, em primeiro lugar, pretender minimizar o sub-atingimento do objectivo do lucro diário ($P_1d_1^-$).

Depois o sub-atingimento das vendas diárias do modelo B ($P_2d_2^-$) e só depois o sub-atingimento das vendas diárias do modelo A ($P_3d_3^-$).

Observe-se outra característica importante deste problema. Muito embora existam três objectivos classificados de forma prioritária, são três objectivos não conflituosos.

O alcançar dos dois objectivos de vendas, 5 unidades do modelo A e 15 unidades do modelo B, também alcançam (até supera neste caso em €350) o objectivo diário das vendas €2400:

5 * €100 + 15 * €150 = €2750

Assim, desde que os dois objectivos de vendas sejam atingidos então todos os três objectivos são satisfeitos.

- **Modelo com vários objectivos – objectivos classificados como prioritários (objectivos conflituosos)**

Aplicação Prática – Exemplo 5

Suponhamos agora que a gestão da LEVEC está confrontada com objectivos conflituosos em virtude da "luta" com um dos sindicatos dos trabalhadores. Por causa deste desacordo, que envolve o número total de horas que trabalham diariamente os trabalhadores, as horas disponíveis na secção de Montagem de Fios são de 90 e na secção de Montagem e Testes são de 70 horas por dia.

Assim, para esta situação a gestão decidiu classificar os objectivos com a seguinte prioridade:

	Objectivo	Prioridade
1	**Utilizar no máximo 90 horas diárias na secção de Montagem de Fios e 70 horas na secção de** Montagem e Testes	P_1
2	Conseguir um lucro mínimo diário, de €2400	P_2
3	**Vender no mínimo 15 unidades do modelo B**	P_3
4	Vender no mínimo 5 unidades do modelo A	P_4

Observemos, mais uma vez, que estes quatro objectivos são incomensuráveis, pois não são medidos na mesma unidade de medida. A LEVEC, pretende agora determinar a combinação produtiva que alcance, ou melhor satisfaça, os quatro objectivos.

Vamos definir as seguintes variáveis de decisão:

d_1^+ = sobre-atingimento do objectivo do lucro diário
d_1^- = sub-atingimento do objectivo do lucro diário

d_2^+ = sobre-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo B
d_2^- = sub-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo B

d_3^+ = sobre-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo A
d_3^- = sub-atingimento do objectivo de vendas para o fogão do modelo A

d_4^+ = sobre-atingimento do objectivo das horas – Secção de Montagem de Fios
d_4^- = sub-atingimento do objectivo das horas – Secção de Montagem de Fios

d_5^+ = sobre-atingimento do objectivo das horas – Secção de Montagem Final e Testes
d_5^- = sub-atingimento do objectivo das horas – Secção de Montagem Final e Testes

O modelo de PO para este problema pode ser reformulado como:

$$\text{Min } Z = \overbrace{P_1 d_4^+ + P_1 d_5^+}^{\boxed{P_1(d_4^+ + d_5^+)}} + P_2 d_1^- + P_3 d_2^- + P_4 d_3^-$$

Sujeito a:

$$
\begin{array}{lcrl}
100A + 150B + d_1^- - d_1^+ & = & 2400 & \text{(objectivo } P_2) \\
B + d_2^- - d_2^+ & = & 15 & \text{(objectivo } P_4) \\
A + d_3^- - d_3^+ & = & 5 & \text{(objectivo } P_3) \\
8A + 4B + d_4^- - d_4^+ & = & 90 & \text{(objectivo } P_1) \\
4A + 4B + d_5^- - d_5^+ & = & 70 & \text{(objectivo } P_1) \\
\end{array}
$$

$$A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-, d_4^+, d_4^-, d_5^+, d_5^- \geq 0$$

A função objectivo deste problema indica que a gestão da LEVEC pretende, em primeiro lugar, minimizar o uso das horas de trabalho em ambas as secções, depois pretende alcançar o objectivo do lucro, depois o objectivo de produção dos fogões modelo B e só depois os fogões modelo A.

Observemos, cuidadosamente, a natureza dos conflitos entre os objectivos.

- Considerando que foi dada prioridade máxima, às duas restrições dos recursos, existe, agora, um conflito inerente entre satisfazer os objectivos das restrições dos recursos (horas disponíveis) e o alcançar do objectivo do lucro e do número de vendas diárias;
- É obvio que não será possível alcançar estes objectivos conflituosos, pois as restrições dos recursos têm uma prioridade mais alta e as quantidades dos recursos foram reduzidas.

Modelo com vários objectivos – ponderações dos objectivos classificados como prioritários (objectivos conflituosos)

Aplicação Prática – Exemplo 6

Suponhamos agora que a gestão da LEVEC está confrontada com um problema semelhante ao Exemplo 5.

Contudo, relativamente ao primeiro objectivo, P_1, a gestão da LEVEC considera duas vezes mais importante evitar a sobre-utilização das 90 horas na Secção de Montagem de Fios do que evitar a sub-utilização das 70 horas na Secção de Montagem Final e Testes.

A formulação deste modelo de PO, envolve a ponderação das variáveis de desvios ao mesmo nível de prioridade, o que pode ser feito já que estas variáveis são comensuráveis.

Vejamos, então, a formulação do problema:

$$\text{Min } Z = \overbrace{2P_1d_4^+ + P_1d_5^-}^{\boxed{P_1(2d_4^+ + d_5^-)}} + P_2d_1^- + P_3d_2^- + P_4d_3^-$$

Sujeito a:

$$\begin{array}{llr}
100A + 150B + d_1^- - d_1^+ & = 2400 & \text{(objectivo } P_2) \\
B + d_2^- - d_2^+ & = 15 & \text{(objectivo } P_3) \\
A + d_3^- - d_3^+ & = 5 & \text{(objectivo } P_4) \\
8A + 4B + d_4^- - d_4^+ & = 90 & \text{(objectivo } P_1) \\
4A + 4B + d_5^- - d_5^+ & = 70 & \text{(objectivo } P_1) \\
\multicolumn{3}{l}{A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-, d_4^+, d_4^-, d_5^+, d_5^- \geq 0}
\end{array}$$

A função objectivo, para este problema, envolve a ponderação das variáveis de desvios da primeira prioridade.

Adicionalmente, a natureza dos objectivos conflituosos, continua a estar presente já que alcançar o lucro diário e o nível de vendas diário conflitua com as restrições dos recursos (agora ponderadas).

Neste caso dentro da P_1 é duas vezes mais importante evitar as horas extraordinárias na Secção de Montagem de Fios do que não gastar toda a capacidade da Secção de Montagem Final e Testes.

Soluções Computacionais para a Programação por Objectivos

Existem várias aproximações que podem ser usadas na resolução da PO Objectivos, quase todas elas baseadas, no método do *Simplex* da PL.

A aproximação de solução a usar está dependente do tipo de modelo de PL em causa. Assim, vamos discutir as soluções computacionais do problema de PO para os seis exemplos apresentados.

Modelo com um único Objectivo - Exemplo 2

Retomando o problema linear formulado para a LEVEC, constatamos que a solução óptima é:

Min $Z = d_1^-$

Sujeito a:

$$8A + 4B \leq 160$$
$$4A + 4B \leq 120$$
$$100A + 150B + d_1^- - d_1^+ = 5000$$
$$A, B, d_1^+, d_1^- \geq 0$$

A = 0	Número de Fogões do modelo A a produzir diariamente
B = 30	Número de Fogões do modelo B a produzir diariamente
Z =€4500	Lucro diário

Vejamos agora a representação gráfica do modelo de PO:

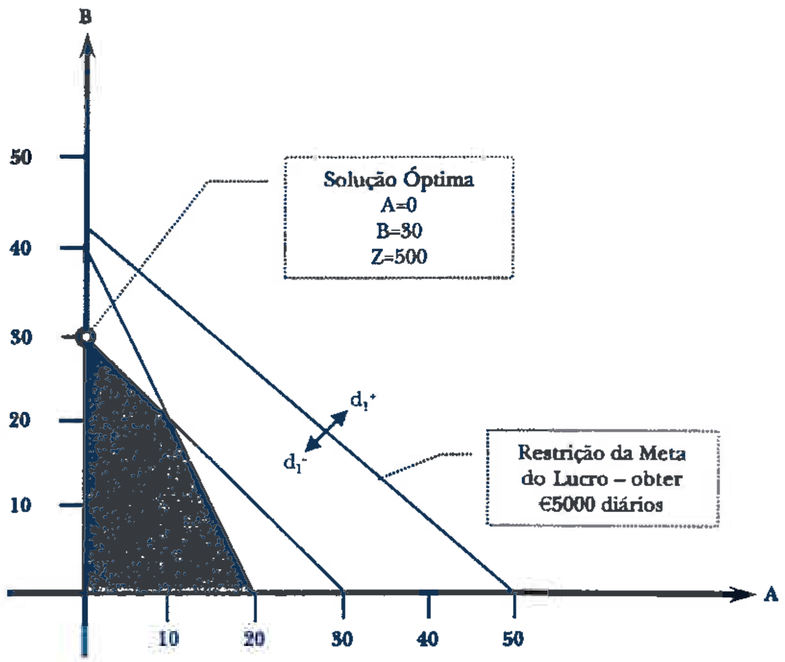


Figura 1

Se ignorarmos a restrição do lucro, a área viável é definida a sombreado. Se consideramos a meta do lucro e notarmos que o lucro pode ser menor, igual ou maior do que €5000, o espaço solução pode ser para qualquer dos lados desta restrição, como é sugerido pela seta, correspondente a d_1^- e d_1^+, com as duas direcções representadas.

O espaço viável ainda é definido, pelas duas restrições associadas com os recursos, que também formam a área viável do problema linear. A próxima etapa envolve a análise da função objectivo (isto é, Minimizar $Z=d_1^-$) que especifica que se pretende minimizar o sub-atingimento (d_1^-) da meta do lucro diário.

Para minimizar esta função objectivo, a solução óptima é igual a A=0, B=30 e $Z=d_1^-=500$. Este é o ponto extremo dentro da área viável mais próximo da meta do lucro, como pode ser visto graficamente.

Sabendo nós das limitações do método gráfico na resolução de PL, essencialmente a nível do número de variáveis do modelo, então o método de *simplex* usado na PL pode ser usado para ajudar a resolver este modelo.

Na construção do quadro inicial, as duas restrições dos recursos são convertidas para igualdades recorrendo, como usualmente às variáveis folga. Na restrição do objectivo a variável d_1^+ representa a variável *surplus* e a variável de desvio d_1^- representa a variável *folga*.

Assim, no quadro inicial, as variáveis básicas são o s_1=160 (variável folga), s_2=120 (variável folga) e o d_1^-=5000 (variável de desvio).

c_B	c_j / Base	0 / A	0 / B	0 / d_1^+	1 / d_1^-	0 / s_1	0 / s_2	b_i
0	S_1	8	4	0	0	1	0	160
0	S_2	4	4	0	0	0	1	120
1	d_1^-	100	150	-1	1	0	0	5000
	Z_j	100	150	-1	1	0	0	5000
	$Z_j - C_j$	100	150	-1	0	0	0	

- A solução básica inicial é igual a S_1=160, S_2=120 e Z=5000. Não sendo produzido qualquer modelo de fogão então o lucro diário não é atingido em €5000 e sobra a totalidade de ambos os recursos. A procura da solução óptima é feita da forma tradicional do método do *simplex*.

No quadro inicial ficam as variáveis de desvios negativas (d_1^- neste caso) pois se não forem produzidos quaisquer fogões a meta do lucro não é atingida na sua totalidade d_1^-=5000.

O quadro final do *simplex* é apresentado a seguir:

c_B	c_j / Base	0 / A	0 / B	0 / d_1^+	1 / d_1^-	0 / S_1	0 / S_2	b_i
0	S_1	4	0	0	0	1	-1.00	40
0	B	1	1	0	0	0	0.25	30
1	d_1^-	-50	0	-1	1	0	-37.5	500
	Z_j	-50	0	-1	1	0	-37.5	500
	$Z_j - C_j$	-50	0	-1	0	0	-37.5	

- O quadro final do *simplex*, indica que o máximo lucro diário que se consegue alcançar é de €4500 e corresponde à produção de 0 unidades do fogão modelo A e de 30 unidades do fogão modelo B.

A meta do lucro não é atingida em €500 (d_1^-=500). Sobram 40 horas na Secção de Montagem de Fios (S_1=40).

Modelo com vários objectivos – de igual importância – Exemplo 3

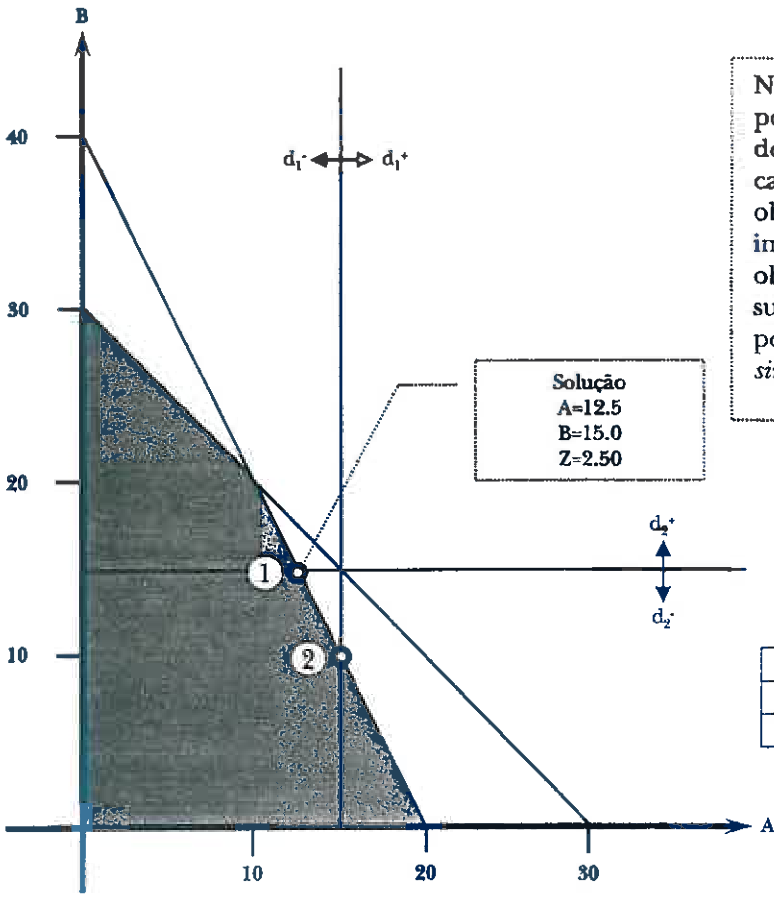
Consideremos o Exemplo 3 definido anteriormente. A figura 2 apresenta a representação gráfica deste problema.

Lembremos da formulação deste modelo que se pretende minimizar os desvios negativos associados com as duas restrições dos objectivos.

$$\text{Min } Z = d_1^- + d_2^-$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 8A + 4B &\leq 160 \\ 4A + 4B &\leq 120 \\ A + d_1^- - d_1^+ &= 15 \\ B + d_2^- - d_2^+ &= 15 \\ A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$



Note que, neste caso, se podem atribuir às variáveis de desvios ponderações cardinais (por exemplo, se o objectivo 1 for 5 vezes mais importante do que o objectivo 2 e assim sucessivamente, também se pode usar o método de *simplex*) – Min $Z = 5d_1^- + 1d_2^-$).

Ponto	d_1^-	d_2^-	Z
1	2.5	0	2.
2	0	5	5.

Figura 2

Da análise do gráfico podemos concluir que, o ponto 1 (A=12.5 e B=15) e o ponto 2 (A=15 e B=10) são dois pontos dentro da área viável que minimizam os desvios negativos das duas restrições dos objectivos. Por inspecção, podemos ver que ponto 1 é o que mais minimiza a soma dos desvios negativos dos dois objectivos com o valor de $Z=1(d_1^-)=2.5$.

O método de *simplex* usado na PL pode ser usado directamente para resolver este tipo de problema de PO com objectivos de igual importância (isto é, os coeficientes da função objectivo das variáveis de desvios são todos 1).

Vejamos então o quadro inicial do *simplex*:

	c_j	0	0	0	1	0	1	0	0	
c_B	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	s_1	s_2	b_i
0	S_1	8	4	0	0	0	0	1	0	160
0	S_2	4	4	0	0	0	0	0	1	120
1	d_1^-	1	0	-1	1	0	0	0	0	15
1	d_2^-	0	1	0	0	-1	1	0	0	15
	Z_j	1	1	-1	1	-1	1	0	0	30
	$Z_j - C_j$	1	1	-1	0	-1	0	0	0	

As variáveis básicas iniciais são as variáveis folga S_1, S_2 e as variáveis de desvios d_1^- e d_2^-. Como nesta fase não estamos a produzir qualquer unidade do fogão modelo A ou do modelo B, então:

- Sobram 160 horas na secção de Montagem de Fios (S_1=160) e 120 horas na secção de Montagem Final e Testes (S_2=120) e os objectivos de vender 15 fogões do modelo A e do modelo B não são atingidos em 15 unidades, d_1^-=15 e d_2^-=15 e Z=30.

Procedendo da forma usual do método do *simplex* encontramos o seguinte quadro óptimo:

	c_j	0	0	0	1	0	1	0	0	
c_B	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	s_1	s_2	b_i
0	B	0	1	1	0	-1	1	0	0	15
0	S_2	0	0	0	0	2	-2	-0.5	1	10
0	A	1	0	0	0	0.5	-0.5	0.125	0	12.5
1	d_1^-	0	0	-1	1	-0.5	0.5	-0.125	0	2.5
	Z_j	0	0	-1	1	-0.5	0.5	-0.125	0	2.5
	$Z_j - C_j$	0	0	-1	0	-0.5	-0.5	-0.125	0	

O quadro óptimo indica que devem ser produzidos 12.5 fogões do modelo A (A= 12.5) e15 fogões do modelo B (B=15):

- A meta de produzir 15 fogões do modelo B é totalmente atingida (d_2^-=0). A meta de produção do modelo A não é atingida em 2.5 (d_1^-=2.5);
- Sobram 10 horas na secção de Montagem Final e de Teste (S_2=10);
- As horas disponíveis na secção de Montagem de Fios são totalmente utilizadas (S_1=0);
- A função objectiva é minimizada com o valor de 2.5 (Z=2.5).

Modelo com vários objectivos – objectivos classificados como prioritários (objectivos não conflituosos) – Exemplo 4

A representação gráfica deste tipo de modelo é apresentada na figura 3. Lembramos que a primeira meta (P_1) consiste em minimizar o sub-atingimento da obtenção do lucro diário (d_1^-). A seguir a meta P_2 propõe-se vender 15 unidades do fogão modelo B (d_3^-). Por último a meta P_3 pretende vender 5 unidades do modelo A (d_3^-).

Min $Z= P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_3^-$
Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
8A + \quad 4B \quad & \leq 160 \\
4A + \quad 4B \quad & \leq 120 \\
100A + 150B + d_1^- - d_1^+ & = 2400 \\
B + \quad d_2^- - d_2^+ & = \quad 15 \\
A + \quad d_3^- - d_3^+ & = \quad 5 \\
A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^- & \geq 0
\end{aligned}
$$

Graficamente, podemos ver que o ponto A=5 e

B=15 está dentro da região viável e satisfaz exactamente a segunda e terceira meta e mais do que satisfaz a primeira meta. Também a função objectivo minimiza a soma dos desvios dos três objectivos com um valor de zero.

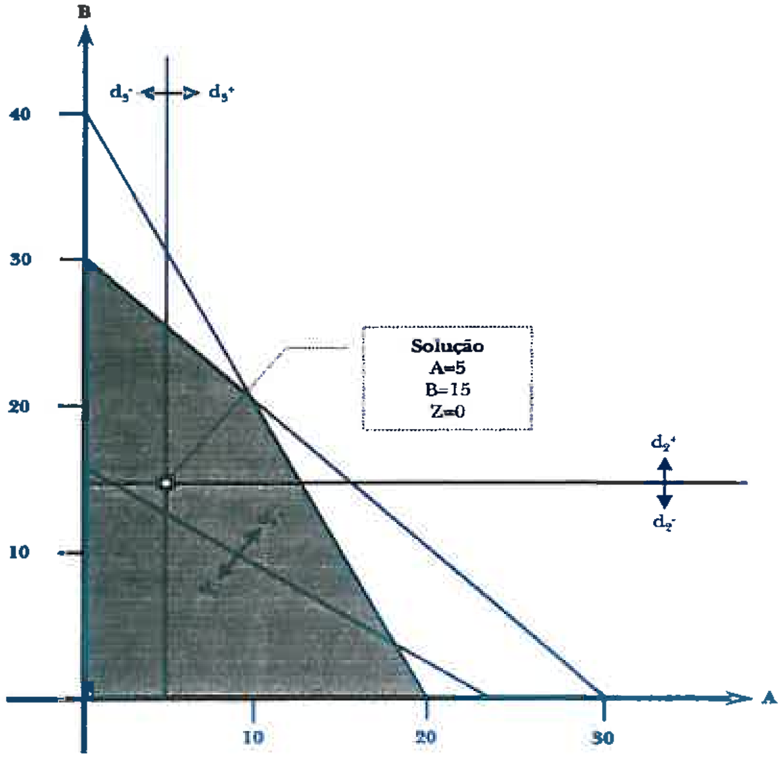


Figura 3

Lembremos também que os factores P_1, P_2 e P_3 são prioritários – na resolução do problema, em primeiro lugar, tenta minimizar-se os desvios associados com a P_1, depois minimizar todos os desvios associados com a P_2 e só depois todos os desvios associados com a P_3.

Para resolver este problema temos de modificar o procedimento usual do método de *simplex* para serem consideradas as classificações prioritárias. Vamos usar o **Método do Si*mplex* Modificado** que passamos a explicar:

	c_j	0	0	0	P_1	0	P_2	0	P_3	0	0	
c_B	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	S_1	S_2	b_i
0	S_1	8	4	0	0	0	0	0	0	1	0	160
0	S_2	4	4	0	0	0	0	0	0	0	1	120
P_1	d_1^-	100	150	-1	1	0	0	0	0	0	0	2400
P_2	d_2^-	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	15
P_3	d_3^-	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	5
P_3	Z_j	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	5
	$Z_j - C_j$	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	
P_2	Z_j	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	15
	$Z_j - C_j$	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	
P_1	Z_j	100	150	-1	1	0	0	0	0	0	0	2400
	$Z_j - C_j$	100	150	-1	0	0	0	0	0	0	0	

- O critério para a **variável que entra na base** (isto é, escolher a variável a entrar na base com o maior valor de Z_j-C_j) não mais é expresso como uma única linha do quadro do simplex. Em vez disso, existe uma linha separada para os valores de Z_j e Z_j-C_j para cada uma das prioridades P_1, P_2 e P_3.

  Como os desvios estão expressos em unidades de medida diferentes não podem ser adicionados. Assim, são necessárias linhas diferentes para contabilizar de forma apropriada os cálculos de cada uma das prioridades.

  Na prática colocam-se as linhas de prioridade mais alta no fundo do quadro e os de mais baixa logo a seguir (em direcção ao topo).

- O valor de Z_j-C_j para qualquer coluna é mostrado nas linhas associadas com as prioridades. Assim:

$Z_1 =$	$8*0 + 4*0 + 100*P_1 + 0*P_2 + 1*P_3 = 100*P_1 + 1*P_3$
Z_1-C_1=	$100*P_1 + 1*P_3 - 0 = 100*P_1 + 1*P_3$
Z_2=	$4*0 + 4*0 + 150*P_1 + 1*P_2 + 0*P_3 = 150*P_1 + 1*P_2$
Z_1-C_1=	$150*P_1 + 1*P_2 - 0 = 150*P_1 + 1*P_2$

e assim sucessivamente. Notemos que estes valores são escritos, respectivamente, em cada coluna, na correspondente prioridade

....	....	A	B
P_3	Z_j	1	0
	$Z_j - C_j$	1	0
P_2	Z_j	0	1
	$Z_j - C_j$	0	-1
P_1	Z_j	100	150
	$Z_j - C_j$	100	150

- Na selecção da **variável que entra na base**, começa-se pela prioridade mais alta, P_1 e escolhe-se a variável que tenha o maior valor positivo na linha Z_j-C_j desta prioridade. Neste caso, escolhe-se para entrar na base a variável B (coluna Pivot).

  Se não houvesse nenhum valor positivo nesta linha, teríamos de nos mover para a prioridade seguinte, P_2 e escolher o maior valor positivo da linha Z_j-C_j. Se não houver qualquer valor positivo na linha Z_j-C_j em qualquer prioridade, então a solução óptima foi obtida;

Se encontrarmos um valor positivo Z_i-C_i numa dada prioridade que tenha um valor negativo numa das linhas Z_i-C_i situada abaixo (prioridade mais alta) esse valor não deve ser considerado.

Isto porque, o valor negativo significa que os desvios do menor (em termos de índice e por isso mais importante) **objectivo serão prejudicados (aumentados) se esta variável** entrar **na base.** Esta situação deve ser evitada pois a solução piorará.

Exemplo

		A	B	C	D	E
...	...	...	...	...	...	...
P_3	$Z_i - C_i$	1	-20	-3	0	40
P_2	$Z_i - C_i$	50	0	-2	0	-5
P_1	$Z_i - C_i$	-30	-40	-5	0	0

Considere-se o extracto de um dado quadro do *simplex*.

Neste caso a **solução óptima** foi encontrada porque:

- Na linha P_1, todos os valores são zero ou negativos;
- Na linha P_2 existe um valor positivo 50, mas por cada unidade da variável A que entrar na base a P_2 melhora de 50 mas a P_1 piora de 30 unidades;
- Na linha P_3:
  - por cada unidade de A que entre na base, P_1 piora de 30, P_2 melhora de 50 unidades e P_3 melhora de 1 unidade;
  - por cada unidade de E que entre na base P_1 mantém-se inalterável, P_2 piora de 5 e P_3 melhora de 40.

Lembramos que se pretende minimizar a prioridades mais altas em primeiro lugar e não se pode melhorar uma dada prioridade prejudicando outra prioridade mais alta.

- Na selecção da **variável que sai da base** usa-se o mesmo critério da programação linear. São calculados os seguintes rácios:

Base		b_i	Coluna Pivot	Rácio
S_1	...	160	4	160/4=40
S_2	...	120	4	120/4=30
d_1^-	...	2400	150	2400/150=16
d_2^-	...	15	1	15/1=15
d_3^-	...	5	0	-

A variável B entra na base e sai a variável d_2^-. No cálculo do novo quadro do *simplex* usa-se a metodologia usual do método do *simplex*.

Depois de termos visto como é que os valores do quadro do *simplex* são encontrados, por **uma questão de simplicidade**, vamos omitir as linhas C_j do quadro do *simplex* e reformular a sua apresentação:

c_B	c_j / Base	0 / A	0 / B	0 / d_1^+	P_1 / d_1^-	0 / d_2^+	P_2 / d_2^-	0 / d_3^+	P_3 / d_3^-	0 / S_1	0 / S_2	b_i
0	S_1	8	0	0	0	4	-4	0	0	1	0	100
0	S_2	4	0	0	0	4	-4	0	0	0	1	60
P_1	d_1^-	100	0	-1	1	150	-150	0	0	0	0	150
0	B	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	15
P_3	d_3^-	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	5
Z_j-C_j	P_3	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	5
	P_2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	P_1	100	0	-1	0	150	-150	0	0	0	0	150

Esta solução indica que devem ser produzidos 15 fogões do modelo B e 0 fogões do modelo A:

- O lucro total é de 15*€150=€2250, ou seja €150 (d_1^-=150 e P_1=150) a menos do que o objectivo pretendido de €2400;
- O gasto total de horas na secção de Montagem de Fios é de 15*4 horas=60 horas ou seja sobram 100 horas nesta secção (S_1=100);
- O gasto total de horas na secção de Montagem Final e de Testes é de 15*4 horas = 60 horas ou seja sobram 60 horas nesta secção (S_2=60);
- O modelo A não é vendido o que significa que a meta 3 não é atingida em 5 unidades (d_3^-=5 e P_3=5);
- A meta 2, produzir 15 fogões do modelo B é totalmente satisfeita P_2=0 e d_2^-=0.

A terceira iteração do método do *simplex* conduz-nos ao seguinte quadro:

c_B	c_j / Base	0 / A	0 / B	0 / d_1^+	P_1 / d_1^-	0 / d_2^+	P_2 / d_2^-	0 / d_3^+	P_3 / d_3^-	0 / S_1	0 / S_2	b_i
0	S_1	5.33	0	0.03	-0.03	0	0	0	0	1	0	96
0	S_2	1.33	0	0.03	-0.03	0	0	0	0	0	1	56
0	d_2^+	0.67	0	-0.01	0.01	1	-1	0	0	0	0	1
0	B	0.67	1	-0.01	0.01	0	0	0	0	0	0	16
P_3	d_3^-	1.00	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	5
Z_j-C_j	P_3	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	5
	P_2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	P_1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0

Nesta fase estão a ser produzidos 16 fogões do modelo B e 0 do modelo A:

- O lucro total é de 16*€150=€2400, ou seja a meta (P_1) do lucro é totalmente satisfeita (d_1^-=0 e P_1=0);
- O gasto total de horas na secção de Montagem de Fios é de 16*4 horas=64 horas ou seja sobram 96 horas nesta secção (S_1=96);

- O gasto total de horas na secção de Montagem Final e de Testes é de 16*4 horas = 64 horas ou seja sobram 56 horas nesta secção (S_2=56);
- O modelo A não é vendido o que significa que essa meta não é atingida em 5 unidades (d_3^-=5 e P_3=5);
- A meta 2, produzir 15 fogões do modelo B é totalmente satisfeita P_2=0 e d_2^-=0.
- É produzido mais um fogão do modelo B do que a meta dos 15 fixada (d_2^+=1).

O próximo quadro do *simplex* é o seguinte:

c_B	c_j	0	0	0	P_1	0	P_2	0	P_3	0	0	
	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	S_1	S_2	b_i
0	S_1	0	0	0.08	-0.08	-8	8	0	0	1	0	88
0	S_2	0	0	0.04	-0.04	-2	2	0	0	0	1	54
0	A	1	0	-0.01	0.01	1.5	-1.5	0	0	0	0	1.5
0	B	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	15
P_3	d_3^-	0	0	0.01	-0.01	-1.5	1.5	-1	1	0	0	3.5
Z_j-C_j	P_3	0	0	0.01	-0.01	-1.5	1.5	-1	0	0	0	3.5
	P_2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	P_1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0

Nesta fase estão a ser produzidos 1.5 fogões do modelo A e 15 fogões do modelo B:

- O lucro total é de 1.5*€100 + 15*€150=€2400, ou seja a meta do lucro é totalmente satisfeita (d_1^-=0 e P_1=0);
- O gasto total de horas na secção de Montagem de Fios é de 1.5*8 horas + 15*4 horas= 72 horas ou seja sobram 88 horas nesta secção (S_1=88);
- O gasto total de horas na secção de Montagem Final e de Testes é de 1.5*4 horas + 15*4 horas = 66 horas ou seja sobram 54 horas nesta secção (S_2=54);
- Apenas é produzido 1.5 fogões do modelo A o que significa que essa meta não é atingida em 3.5 unidades (d_3^-=3.5 e P_3=3.5);
- A meta 2, produzir 15 fogões do modelo B é totalmente satisfeita P_2=0 e d_2^-=0.
- Veja-se que muito embora, na linha da P_3, exista o valor 1.5 a variável d_2^- não entra na base, pois por cada unidade de d_2^- que entre na base piora a P_1 de 1 unidade e a P_3 melhora de 1.5 unidades.

Vejamos agora uma nova iteração do método do *simplex* modificado:

c_B	c_j	0	0	0	P_1	0	P_2	0	P_3	0	0	
	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	S_1	S_2	b_i
0	S_1	0	0	0	0	4	-4	8	-8	1	0	60
0	S_2	0	0	0	0	4	-4	4	-4	0	1	40
0	A	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	5
0	B	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	15
0	d_1^+	0	0	1	-1	-150	150	-100	100	0	0	350
Z_j-C_j	P_3	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
	P_2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	P_1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0

Nesta fase são produzidos 5 fogões do modelo A e 15 fogões do modelo B:

- O lucro total é de 5*€100 + 15*€150=€2750, ou seja a meta do lucro €2400 é sobre-atingida em €350 ($d_1^+=350$ e $P_1=0$);
- O gasto total de horas na secção de Montagem de Fios é de 5*8 horas + 15*4 horas= 100 horas ou seja sobram 60 horas nesta secção ($S_1=60$);
- O gasto total de horas na secção de Montagem Final e de Testes é de 5*4 horas + 15*4 horas = 80 horas ou seja sobram 40 horas nesta secção ($S_2=40$);
- As metas de produção de 5 fogões do modelo A e de 15 fogões do modelo B são totalmente alcançadas ($d_2^-= d_2^+= d_3^-= d_3^+= P_2=P_3=0$);
- Este quadro representa a solução óptima porque todos os valores da linha Z_j-C_j são zero ou negativos;
- O valor da função objectivo é 0.

Modelo com vários objectivos – objectivos classificados como prioritários (objectivos conflituosos) – Exemplo 5

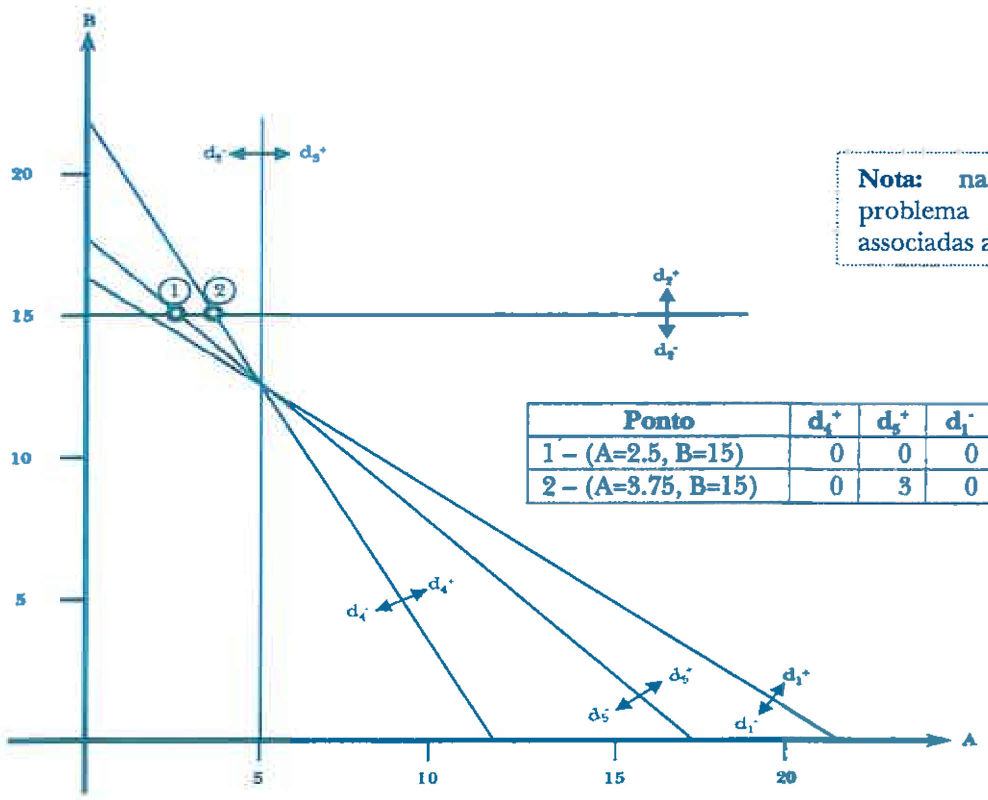
Relembremos o problema apresentado anteriormente. Vemos que os objectivos das vendas diárias e o objectivo do lucro estão em conflito com o objectivo que pretende minimizar o uso das horas da Secção de Montagem de Fios e da Secção de Montagem e Testes.

Min $Z= P_1d_4^+ + P_1d_5^+ + P_2d_1^- + P_3d_2^- + P_4d_3^-$

Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
100A + 150B + d_1^- - d_1^+ &= 2400 \\
B + d_2^- - d_2^+ &= 15 \\
A + d_3^- - d_3^+ &= 5 \\
8A + 4B + d_4^- - d_4^+ &= 90 \\
4A + 4B + d_5^- - d_5^+ &= 70 \\
A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-, d_4^+, d_4^-, d_5^+, d_5^- &\geq 0
\end{aligned}
$$

A solução gráfica deste problema é mostrada na figura seguinte.



Nota: na formulação do problema com a P_1 estão associadas as variáveis d_4^- e d_5^-.

Ponto	d_4^+	d_5^+	d_1^-	d_2^-	d_3^-	Z
1 – (A=2.5, B=15)	0	0	0	0	2.5	2.5
2 – (A=3.75, B=15)	0	3	0	0	1.25	4.25

Figura 4

A prioridade 1 pretende utilizar no máximo 90 horas na secção de Montagem de Fios e 70 horas na Secção de Montagem e Testes. Graficamente vemos que o ponto 1 (A=2.5 e B=15) e o ponto 2 (A=3.75 e B=15), satisfazem estes dois objectivos, respectivamente.

Ambos os pontos estão acima da linha da linha que representa o segundo objectivo (isto é, ter um lucro diário de €2400). O ponto 1 e 2 também satisfazem exactamente o terceiro objectivo de produzir 15 unidades do fogão modelo B. Finalmente, estes dois pontos não alcan-çam o quarto objectivo de produzir 5 fogões do modelo A.

O ponto 1 satisfaz exactamente a P_1 de utilizar 70 horas na secção de Montagem e Testes e mais do que satisfaz a P_1 de utilizar 90 horas na secção de Fios.

O ponto 2 satisfaz exactamente o primeiro objectivo de usar as 90 horas na secção de Fios mas não satisfaz o segundo objectivo de utilizar as 70 horas na secção de Montagem e Testes. Por isso, a solução óptima é no ponto 1 porque minimiza a soma dos desvios dos cinco objectivos com um valor de Z=1 (d_3^+) = 2.5.

Vejamos agora a resolução deste problema usando o método do *simplex:*

	c_j	0	0	0	P_2	0	P_3	0	P_4	P_1	0	P_1	0	
c_B	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	d_4^+	d_4^-	d_5^+	d_5^-	b_i
P_2	D_1^-	100	150	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2400
P_3	D_2^-	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	15
P_4	d_3^-	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	5
0	d_4^-	8	4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	90
0	d_5^-	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	70
Z_j-C_j	P_4	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5
	P_3	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	15
	P_2	100	150	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2400
	P_1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0

O quadro óptimo deste problema é o seguinte:

	c_j	0	0	0	P_2	0	P_3	0	P_4	P_1	0	P_1	0	
c_B	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	d_4^+	d_4^-	d_5^+	d_5^-	b_i
0	A	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-0.25	0.25	2.5
0	B	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	15
P_4	d_3^-	0	0	0	0	-1	1	-1	1	0	0	0.25	-0.25	2.5
0	d_4^-	0	0	0	0	-4	4	0	0	-1	1	2	-2	10
0	d_1^-	0	0	1	-1	-50	50	0	0	0	0	-25	25	100
Z_j-C_j	P_4	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	0.25	-0.25	2.5
	P_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
	P_2	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0

Nesta fase são produzidos 2.5 fogões do modelo A e 15 fogões do modelo B:

- O gasto total de horas na secção de Montagem de Fios é de 2.5*8 horas + 15*4 horas= 80 horas ou seja sobram 10 horas nesta secção ($d_4^-=10$);
- O gasto total de horas na secção de Montagem Final e de Testes é de 2.5*4 horas + 15*4 horas = 70 horas ou sejam nada sobra nesta secção ($d_5^-=d_5^+=0$);
- A meta P_1 é totalmente alcançada. Não são gastas mais de 90 horas na secção de Fios e mais de 70 horas na secção de Montagem e Testes;
- O lucro total é de 2.5*€100 + 15*€150=€2500, ou seja a meta do lucro é sobre-atingida em €100 ($d_1^+=100$ e $P_2=0$). A meta P_2 é totalmente atingida pois são realizados os €2400;
- A meta P_3 de produção de 15 fogões do modelo B é totalmente alcançada ($d_2^-= d_2^+=0$)
- A meta P_4 de produção de 5 fogões do modelo A não é alcançada ($d_3^-= 2.5$ e P_4=2.5);
- Este quadro representa a solução óptima porque todos os valores das linha Z_j-C_j são zero ou negativos ou se são positivos numa dada prioridade são zero ou negativos na prioridade mais alta;
- Veja-se que existem objectivos conflituosos:
  P_3 e P_4 - melhorar o P_4 piora o P_3;
  P_1 e P_4 – melhorar o P_4 piora o P_1.

Repare-se que a solução óptima foi encontrada porque, se **1 unidade** da variável:

- d_2^- (fogões do modelo B a produzir a menos do que os 15 pretendidos) entrar na base, a P_4 melhora de 1 unidade mas a P_3 piora de 1 unidade – ou seja se se deixar de produzir um fogão do modelo B (a P_3 piora de 1 unidade) pode produzir-se mais 1 fogão do modelo A (a P_4 melhora de 1 unidade),

- d_5^+ (número de horas na secção de Montagem Final e de Testes a mais das 70 horas disponíveis) entrar base, a P_4 melhora de 0.25 unidades e a P_1 piora de 1 unidade. Se dispusermos de mais 1 hora na secção de Montagem Final e de Testes podemos produzir mais 0.25 unidades do fogão modelo A e o lucro aumenta de €25.

Modelo com vários objectivos – ponderações dos objectivos classificados como prioritários (objectivos conflituosos) – Exemplo 6

Lembremos que as classificações dos objectivos são prioritárias e que as variáveis de desvios associadas com a P_1 foram ponderadas. Finalmente, veja-se que a meta do lucro diário e das vendas diárias estão em conflito com os objectivos que pretendem minimizar o uso das horas de trabalho na secção de Fios e na secção de Montagem e Testes.

Min Z= $2P_1d_4^+ + P_1d_5^- + P_2d_1^- + P_3d_2^- + P_4d_3^-$

Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
100A + 150B + d_1^- - d_1^+ &= 2400\\
B + d_2^- - d_2^+ &= 15\\
A + d_3^- - d_3^+ &= 5\\
8A + 4B + d_4^- - d_4^+ &= 90\\
4A + 4B + d_5^- - d_5^+ &= 70\\
A, B, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-, d_4^+, d_4^-, d_5^+, d_5^- &\geq 0
\end{aligned}
$$

A representação gráfica deste problema é apresenta da na figura 4. A P_1 da gestão, evitar a sobre-utilização das horas na secção Montagem de Fios é duas vezes mais importante do que evitar a sobre-utilização das horas na secção de Montagem Final e Testes.

Graficamente vemos que o ponto 1 (A=3.75 e B=15) satisfaz exactamente o objectivo com maior ponderação enquanto excede o objectivo com menor ponderação. O segundo objectivo, de se conseguir um lucro de €3400 é excedido no ponto 1. O ponto 1 também alcança o terceiro objectivo, produzir exactamente 15 fogões do modelo B. Contudo este ponto não alcança o quarto objectivo de se produzirem 5 fogões do modelo A. A solução óptima deste problema é no ponto 1, pois minimiza a soma dos desvios, $Z=1*d_3^-=1.25$.

O quadro inicial do *simplex* é o seguinte:

	c_j	0	0	0	P_2	0	P_3	0	P_4	$2P_1$	0	0	P_1	
c_B	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	d_4^+	d_4^-	d_5^+	d_5^-	b_i
P_2	d_1^-	100	150	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2400
P_3	d_2^-	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	15
P_4	d_3^-	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	5
0	d_4^-	8	4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	90
P_1	d_5^-	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	70
Z_j-C_j	P_4	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5
	P_3	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	15
	P_2	100	150	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2400
	P_1	2	2	0	0	0	0	0	0	-2	0	-1	0	35

O quadro óptimo é o seguinte:

	c_j	0	0	0	P_2	0	P_3	0	P_4	$2P_1$	0	0	P_1	
c_B	Base	A	B	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	d_4^+	d_4^-	d_5^+	d_5^-	b_I
0	d_5^+	0	0	0	0	-2	2	0	0	-0.5	0.5	1	-1	5.0
0	d_1^+	0	0	1	-1	-100	100	0	0	-12.5	12.5	0	0	225
0	A	1	0	0	0	0.5	-0.5	0	0	-0.13	0.13	0	0	3.75
0	B	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	15
P_4	d_3^-	0	0	0	0	-0.5	0.5	-1	1	0.13	-0.13	0	0	1.25
Z_j-C_j	P_4	0	0	0	0	-0.5	0.5	-1	0	0.13	-0.13	0	0	1.25
	P_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
	P_2	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_1	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	-1	0

Nesta fase são produzidos 3.75 fogões do modelo A e 15 fogões do modelo B:

- O gasto total de horas na secção de Montagem de Fios é de 3.75*8 horas + 15*4 horas= 90 horas ou seja as horas desta secção são totalmente gastas ($d_4^-=d_4^+=0$);
- O gasto total de horas na secção de Montagem Final e de Testes é de 3.75*4 horas + 15*4 horas = 75 horas ou seja esta meta é excedida em 5 horas($d_5^+=5$);
- A meta P_1 é totalmente alcançada. Note que, a ponderação das variáveis associadas com a P_1 conduziu a uma solução em que a variável associada com a ponderação mais alta de P_1 é exactamente satisfeita. A segunda ponderação de P_1 é excedida em 5 horas (isto é, $d_5^+=5$);

- O lucro total é de 3.75*€100 + 15*€150=€2625, ou seja a meta do lucro é sobre-atingida em €225 ($d_1^+=225$ e $P_2=0$). A meta P_2 é totalmente atingida pois são realizados os €2400;
- A meta P_3 de produção de 15 fogões do modelo D é totalmente alcançada ($d_2^-= d_2^+=0$)
- A meta P_4 de produção de 5 fogões do modelo A não é alcançada ($d_3^-= 1.25$ e $P_4=1.25$);
- Este quadro representa a solução óptima porque todos os valores da linha Z_j-C_j são zero ou negativos ou se são positivos numa dada prioridade são zero ou negativos na prioridade mais alta;
- Veja-se que existem objectivos conflituosos:
  P_3 e P_4 - melhorar o P_4 piora o P_3;
  P_1 e P_4 - melhorar o P_4 piora o P_1.

Em suma, neste caso, três dos quatros objectivos são totalmente alcançados.

Algoritmo do Método do *Simplex* Modificado

Tal como na programação linear, depois de formulado o problema de PO, é importante compreender como é que estes problemas podem ser resolvidos.

A técnica usada para resolver estes problemas emprega o **Método de *Simplex* Modificado.** Este método usa um processo de solução iterativo muito similar, embora não idêntico, ao método de *simplex*.

Vejamos como funciona este método:

Etapa 1: **Formular o problema e construir o quadro inicial do simplex modificado.**

Este quadro é muito semelhante ao quadro do simplex para um problema de minimização. Existem, contudo, algumas diferenças:

- Todo o problema de PO é um problema de minimização. Por isso, em vez de multiplicarmos a função objectivo por -1, multiplicamos a linha C_j-Z_j por -1 e calculamos Z_j-C_j de modo a podermos usar o procedimento usual;
- A linha Z_j é eliminada de modo a reduzir-se a dimensão do quadro;
- A função objectivo de problemas de PO é expressa pelas Prioridades associadas com os objectivos (com as respectivas ponderações se existirem). As contribuições unitárias são substituídas pelas prioridades (e ponderações);
- As últimas linhas do quadro constituem uma matriz dos Z_j-C_j – uma para cada prioridade. Isto é necessário porque as ponderações das prioridades estão expressas em diferentes unidades de medida. Estas prioridades são colocadas da menor prioridade (linha de topo Z_j-C_j) para a prioridade maior (linha de fundo Z_j-C_j) – este arranjo permite escolher a variável que entra na base (coluna Pivot) a partir do fundo do quadro. Os Z_j-C_j são calculados da mesma forma que no quadro de *simplex*.
- As variáveis do problema são colocadas da mesma forma que no quadro do *simplex* aparecendo em primeiro lugar as variáveis de decisão.
- As variáveis de desvios negativas para cada restrição constituem a solução básica inicial do quadro inicial. Têm a mesma função que as variáveis folga no quadro do *simplex* inicial.

Etapa 2: O processo iterativo começa sempre com a prioridade mais alta. Por isso, começar inicialmente fazendo k=1; K é um ponteiro que representa a linha Z_j-C_j associada com a prioridade P_k. Teste o valor de b_i correspondente a P_k. Se este valor for zero, este objectivo foi totalmente atingido (satisfeito). Vá para o passo 6. Se o valor não for zero vá para o passo 3.

Etapa 3: À nova variável a entrar na base corresponderá o maior valor positivo da linha Z_j-C_j para a prioridade P_k e, além disso, não terá qualquer coeficiente negativo associado com ele (na mesma coluna) num nível de prioridade mais alto.

Se existir um empate entre dois valores em colunas diferentes (no mesmo nível de prioridade), passamos para a prioridade mais baixa seguinte ainda não satisfeita, e para estas colunas devemos escolher a variável com o maior coeficiente positivo.

Se não existir qualquer coeficiente positivo na linha P_k que satisfaça as condições necessárias vá para a etapa 6; se não vá para a etapa 4;

Atente-se no seguinte extracto do quadro do *simplex:*

...		...	...	...	...	...	...	b_i
		A	B	C	D	E	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_3	$Z_j - C_j$	1	-20	-3	0	40	...	500
P_2	$Z_j - C_j$	50	5	-2	0	-5	...	0
P_1	$Z_j - C_j$	30	30	-5	0	0	...	4

Coluna Pivot
Indica a variável a entrar na base.

Como o objectivo associado com a prioridade mais alta não é zero (P_1=4), procurar a variável não básica a que corresponde o maior valor na linha Z_j-C_j na prioridade 1. Neste caso existe um empate – coluna A e B. Para partir este empate, examinar a prioridade seguinte não satisfeita. Como a P_2 é totalmente satisfeita (b_i da linha P_2 é zero) devemos procura na P_3. A inspecção da prioridade P_3 mostra que o único valor positivo (1) é o da coluna A, pois o valor da variável B é negativo (-20). Por isso vamos escolher a variável A para entrar na base. (Se os valores de A e B na P_3 fossem ambos positivos devíamos escolher a variável a que correspondesse o maior valor. Se todos os valores, das correspondentes colunas, fossem negativos então partir o empate de forma arbitrária – escolher uma variável à sorte).

Etapa 4: Encontrar a variável que sai da base da mesma forma que no quadro do *simplex* de um problema de minimização. Escolher a linha com o menor rácio não negativo, calculado dividindo o valor da solução pelo correspondente valor da coluna (pivot) associada com a variável que entra na base.

	Base	...	...	...	...	...	...		
		A	B	C	D	E	...	b_i	Rácio
...		...	...	...	...	...	...	...	...
...	d_1^-	4					...	300	300/34=75
...	d_2^-	2					...	100	100/2=50
	d_3^-	-3					...	200	-
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Linha Pivot
Indica a variável que sai da base

Etapa 5: Desenvolver um novo quadro usando os mesmos procedimentos que no método do ***simplex*** para determinar os novos coeficientes do quadro.

Etapa 6: **Teste de optimização** - examinar o próximo nível de prioridade, P_{k+1}. Se o novo valor de k+1 exceder o valor do número total de níveis de prioridade da formulação do problema, K então pare – a solução óptima foi encontrada. Se, contudo, $K+1 \leq K$, volte à **etapa 2** e re-examine a linha $Z_j - C_j$ para a prioridade P_{k+1}.

Casos Práticos

Aplicação Prática – Problema de Dieta

A nutricionista de uma Câmara Municipal tem sete alimentos diferentes para planear uma refeição: bife, leite, ovos, iogurte, pão, arroz e sumo de laranja.

A informação nutricional e o respectivo custo são apresentados na tabela seguinte:

Elementos Nutricionais	Bife (gr)	Leite (Copo)	Ovos (cada)	Iogurte (gr)	Pão (gr)	Arroz (gr)	Sumo (copo)	Recomendações Diárias
Vitamina A- mg	14	760	1180	600	0	0	1000	14000
Ferro – mg	2	0.2	1.1	0.24	1.5	3.4	1	24
Proteínas – gr	18	18	14	14	5	30	4	150
Energia – calorias	100	340	200	160	160	1254	180	5200
Carbonetos - g	3.4	24	0	28	28	224	50	-
Colesterol - uni	2	10	20	0	0	0	0	-
Custo por unidade	0.36	0.70	0.20	0.34	0.30	0.30	0.38	

Para manter uma alimentação equilibrada, a nutricionista recomenda fortemente o consumo dos vários alimentos nas seguintes quantidades:

- 100 gr de bife
- 6 copos de leite
- 3 ovos
- 120 gr de iogurte
- 150 gr de pão

- 90 gr arroz
- 4 copos de sumo

A nutricionista dispõe de €7 por dia para planear a sua refeição. De acordo com estas restrições, a nutricionista pretende definir uma refeição que satisfaça as necessidades nutricionais bem como as suas preferências pelos vários alimentos.

Ela definiu as seguintes prioridades alimentares:

1. Satisfazer as recomendadas necessidades diárias em vitamina A, ferro, proteínas e energia;
2. Minimizar a quantidade de carbonetos e colesterol;
3. Incorporar na refeição a suas preferências alimentares (mínimas): 3 copos de leite, 250 gramas de iogurte e 2 copos de sumo.

Um modelo de PO pode ser formulado para determinar as refeições apropriadas.

Atente-se na formulação do problema:

B = número de gramas de bife a incluir na refeição
L = número de copos de leite a incluir na refeição
...
S = número de copos de sumo a incluir na refeição

- Restrições do Consumo Máximo Permitido – Restrições Estruturais

$B \leq 100$ (Bife)
$L \leq 6$ (Leite)
$O \leq 3$ (Ovos)
$I \leq 120$ (Iogurte)
$P \leq 150$ (Pão)
$A \leq 90$ (Arroz)
$S \leq 4$ (Sumo)

- Restrição do Orçamento

$$0.36B + 0.70L + 0.20O + 0.34I + 0.30P + 0.30A + 0.38S \leq 7$$

- Metas

$14B + 760L + 1180O + 600I + 0P + 0A + 1000S + d_1^- - d_1^+ = 14000$ (Vitamina A)
$2B + 0.2L + 1.1O + 0.24I + 1.5P + 3.4A + 1S + d_2^- - d_2^+ = 24$ (Ferro)
$18B + 18L + 14O + 14I + 5P + 30A + 4S + d_3^- - d_3^+ = 150$ (Proteínas)
$100B + 340L + 200O + 160I + 160P + 1254A + 180S + d_4^- - d_4^+ = 5200$ (Energia)

$3.4B + 24L + 0O + 28I + 28P + 224A + 50S + d_5^- = 0$ (Carbonetos)
$2B + 10L + 200O + 0I + 0P + 0A + 0S + d_6^- = 0$ (Colesterol)

$L - d_7^+ = 3$ (Copos de Leite)
$I - d_8^+ = 250$ (Gramas de Iogurte)
$S - d_9^+ = 2$ (Copos de Sumo)

- Função Objectivo

$$\text{Min } Z = P_1(d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + d_4^- + d_4^+) + P_2(d_5^+ + d_6^+) + P_3(d_7^+ + d_8^+ + d_9^+)$$

- Todas as variáveis ≥ 0

Aplicação Prática – Selecção de Projectos

A empresa FELI está perante a opção de escolher 7 alternativas de investimento num horizonte de 10 anos. Os investimentos bem como os factores financeiros associados são apresentados na tabela seguinte:

Alternativa de Investimento	Duração Investimento (anos)	Taxa Anual de Retorno (%)	Coeficiente de Risco	Potencial de Crescimento (%)
A	4	5	1	0
B	7	12	5	18
C	8	9	4	10
D	6	20	8	32
E	10	15	6	20
F	5	6	3	7
G	0	0	0	0

- A duração do investimento representa o número esperado de anos requeridos para que a taxa anual de retorno seja realizada, tendo em consideração a possibilidade de re-investimento.
- A taxa anual de retorno representa a taxa esperada da rendibilidade do investimento durante os 10 anos.
- O coeficiente de risco é uma estimativa ordinal do risco relativo de cada oportunidade de investimento numa escala de 1 a 10 (quanto maior for a classificação maior é o risco percebido da alternativa).

O potencial de crescimento, expresso em percentagem, também representa uma estimativa subjectiva do potencial crescimento do valor do investimento no horizonte temporal dos 10 anos.

A FELI pretende determinar a proporção dos seus fundos disponíveis a investir em cada alternativa de forma a alcançar os seus objectivos, classificados de acordo com as seguintes prioridades:

1. Investir em numerário (opção G) 9% do total dos fundos, de forma a manter uma liquidez aceitável;
2. Ter uma taxa anual média de retorno de 14% ou mais;
3. Obter um coeficiente de risco médio de 5 ou menos;
4. Obter um potencial médio de crescimento de 14% ou mais;
5. Conseguir um objectivo médio de duração do investimento de 6 anos.

Formulação do problema:

A = proporção dos fundos disponíveis (totais) a investir na alternativa A

...

G = proporção dos fundos disponíveis (totais) a investir na alternativa G

- Restrições das Metas

$$G + d_1^- + d_1^+ = 0.09 \qquad \text{(Alternativa G)}$$
$$0.05A + 0.12B + 0.09C + 0.20D + 0.15E + 0.06F + 0G + d_2^- - d_2^+ = 0.14 \qquad \text{(Retorno)}$$
$$1A + 5B + 4C + 8D + 6E + 3F + 0G + d_3^- - d_3^+ = 5 \qquad \text{(Risco)}$$
$$0A + 0.18B + 0.10C + 0.32D + 0.20E + 0.07F + 0G + d_4^- - d_4^+ = 0.14 \qquad \text{(Crescimento)}$$
$$4A + 7B + 8C + 6D + 10E + 5F + 0G + d_5^- - d_5^+ = 6 \qquad \text{(Duração)}$$

- Restrições Estruturais

$$A + B + C + D + E + F + G + d_6^- - d_6^+ = 1.0 \qquad \text{(Investimento total)}$$

- Função Objectivo

$$\text{Min } Z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+ + P_4 d_4^- + P_5(d_5^- + d_5^+)$$

- Todas as variáveis ≥ 0

Aplicação Prática – Consultório Médico

Uma clínica dentária pública oferece tratamentos especializados: A, B, C, D, E, F e G aos clientes. Muito embora os clientes tenham seguros ou outros programas de comparticipações, contudo, estes meios, muitas vezes, não são suficientes para as despesas.

A informação julgada relevante é apresentada na tabela seguinte.

Tipo de Tratamento	Custo médio de (de funcionamento) por Tratamento (€)	Tempo Médio por Tratamento (horas)
A	90	0.33
B	100	1.00
C	370	1.25
D	120	0.50
E	160	0.75
F	210	0.50
G	70	0.50

O custo diário de funcionamento da clínica é de €7875 e existem disponíveis 100 horas dentista. Existem também duas politicas:

- **Politica 1:** O tratamento A e G não podem exceder um terço de todos os casos tratados;
- **Politica 2:** O tratamento D deve representar, no mínimo, 10% dos casos tratados.

A clínica pretende tratar diariamente 90 pacientes. Também, por ordem de importância, delineou os seguintes objectivos, classificados do mais importante para o menos importante:

1. Minimizar o sub-atingimento de atender 90 pacientes diariamente;
2. Evitar os custos diários além de €7875;
3. Minimizar o sobre-atingimento da política 2;
4. Atingir o objectivo 2 o mais possível.

Formulação do problema:

A = número de tratamentos do tipo A a efectuar diariamente

...

G = número de tratamentos do tipo G a efectuar diariamente

- Restrições das Metas

$A + B + C + D + E + F + G + d_1^- + d_1^+ = 90$	(Tratamentos)
$90A + 100B + 370C + 120D + 160E + 210F + 70G + d_2^- - d_2^+ = 7875$	(Gasto)
$0.67A - 0.33B - 0.33C - 0.33D - 0.33E - 0.33F + 0.67G + d_3^- - d_3^+ = 0$	(Politica 1)
$-10A - 10B - 10C + 0.90D - 0.10E - 0.10F - 0.10G + d_4^- - d_4^+ = 0$	(Politica 2)

- Restrições Estruturais

$0.33A + 1.0B + 1.25C + 0.50D + 0.75E + 0.50F + 0.50G \leq 100$ (Investimento total)

- Função Objectivo

$\text{Min } Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^+ + P_4(d_4^- + d_4^+)$

- Todas as variáveis ≥ 0

Aplicação Prática – Centro Comercial

Uma dada cidade está a planear a abertura de um novo centro comercial. Este centro comercial terá uma área útil de 85000 metros quadrados destinada a lojas comerciais, classificadas em três tipos:

- Pequenas com uma área média de $300m^2$;
- Médias com uma área média de $1500m^2$;
- Grandes com uma área média de $7500m^2$.

Os custos de amortização destas lojas são de €20000, €60000 e €800000 por ano, e as receitas anuais são de €25000, €80000 e €1250000, respectivamente. O orçamento anual disponível para investimento é de 35 milhões de euros.

Foram definidas as seguintes restrições estruturais pelo administrador do centro comercial:

- O número de lojas comerciais grandes não pode ser superior a 6;
- Pelo menos um terço do espaço total tem de ser destinado a lojas de pequena dimensão;
- Não mais de 25% da receita total pode advir das lojas comerciais de média dimensão.

Por outro lado, a administração do centro comercial, depois de uma reunião com a Câmara Municipal da Cidade, definiu as seguintes metas:

1. Não gastar mais do que os 35 milhões de euros disponíveis;
2. Ter um lucro anual mínimo de €3750000;
3. Não utilizar mais do que os $85000m^2$ disponíveis.

Formulação do problema:

P = número de lojas de pequena dimensão a construir
M = número de lojas de média dimensão a construir
G = número de lojas de grande dimensão a construir

- Restrições das Metas

$$20000P + 60000M + 800000G + d_1^- - d_1^+ = 35000000 \quad \text{(Orçamento)}$$
$$5000P + 20000M + 450000G + d_2^- - d_2^+ = 3750000 \quad \text{(Lucro)}$$
$$300P + 1500M + 7500G + d_3^- - d_3^+ = 85000 \quad (m^2)$$

- Restrições Estruturais

$$G \leq 6 \quad \text{(Lojas grandes)}$$
$$300A/(300A + 1500M + 7500G) \geq 0.33 \quad \text{(Área)}$$
$$80000M/(25000P + 80000M + 1250000G) \leq 0.25 \quad \text{(Receita)}$$

- Função Objectivo

$$\text{Min } Z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+$$

- Todas as variáveis ≥ 0

Aplicação Prática – Publicidade

A empresa de aviação TKA pretende promover uma oferta de voo entre Nova Iorque e Lisboa. Os canais de publicidade disponíveis bem como outra informação pertinente são apresentados na tabela seguinte:

Canal Publicitário	Custo por Exposição	Clientes atingidos por cada Exposição	Número de Exposições
Televisão	€180000/min	21400000	24
Rádio	€100000/min	11850000	20
Revista	€75000/pág	6875000	50
Jornal Nacional	€4500/pág	4180000	80
Jornal Regional	€3000/pág	2320000	120

A gestão da TKA definiu as seguintes metas:

1. Atingir 50000000 clientes com a campanha de publicidade;
2. Não gastar mais do que €4750000 em publicidade;
3. Quer que seja minimizada a despesa feita na televisão em publicidade e que esta não ultrapasse 50% do gasto total. Quer também que seja minimizada a despesa feita nos jornais em publicidade e que não ultrapasse 10% da despesa total;
4. Tentar atingir o mais possível as restrições associadas ao número de exposições nos jornais.

TE = número de anúncios a efectuar na televisão
RA = número de anúncios a efectuar na rádio
RE = número de anúncios a efectuar na revista
JN = número de anúncios a efectuar no jornal nacional

JR= número de anúncios a efectuar no jornal regional

- Restrições das Metas

1. $21400000TE + 11850000RA + 6875000RE + 4180000JN + 2320000JR + d_1^- - d_1^+ = 50000000$
2. $180000TE + 100000RA + 75000RE + 4500JN + 3000JR + d_2^- - d_2^+ = 4750000$
3. $90000TE - 50000RA - 37500RE - 2250JN - 1500JR + d_3^- - d_3^+ = 0$
4. $-18000TE + 10000RA - 7500RE + 4050JN + 2700JR + d_4^- - d_4^+ = 0$

- Restrições Estruturais

$TE \leq 24$
$RA \leq 20$
$RE \leq 50$
$JN \leq 80$
$JR \leq 120$

- Função Objectivo

$$\text{Min } Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^+ + P_4 (d_4^- + d_4^+)$$

- Todas as variáveis ≥ 0

Aplicação Prática – Loja de Computadores

O Sr José tem uma loja de computadores onde vende a marca IBM e COMPACT. Ele está a tentar definir a melhor maneira de gerir o seu negócio. Pretende reformar-se em breve e arranjar um "pé de meia" que lhe permita salvaguardar a velhice. Por outro lado, o Sr José é um bom *vivant* e não quer de forma alguma ser escravo do seu negócio.

Cada computador, deixa ao Sr José um lucro bruto de €1500 e €1000 respectivamente, para a marca IBM e Compact. Além disso cada unidade custa-lhe €2300 e €1600, respectivamente.

Os registos das vendas dizem ao Sr José que existe uma correlação positiva muito forte entre o número de horas que trabalha e o número de vendas efectuadas. Aproximadamente 45 e 30 horas, são dispendidas pelo SR José, mensalmente, na venda, garantia, manutenção e familiarização com o novo software, por cada unidade de computador IBM e COMPACT, respectivamente.

A IBM e a COMPACT obrigam-no a adquirir um mínimo de 2 computadores por mês para poder continuar a ser um retalhista autorizado.

O Sr José estabeleceu, depois de uma semana de aturada reflexão, as seguintes metas:

1. Satisfazer a obrigatoriedade mensal de adquirir 2 computadores de cada marca;
2. Não gastar em computadores mais do que €15000 por mês;
3. Conseguir um lucro mensal bruto de €10000;
4. Não trabalhar mais do que 185 horas por mês.

I = número de computadores da Marca IBM a adquirir por mês
C = número de computadores da Marca Compact a adquirir por mês

- Restrições das Metas

1. $I + d_1^- - d_1^+ = 2$
   $C + d_2^- - d_2^+ = 2$
2. $2300I + 1600C + d_3^- - d_3^+ = 15000$
3. $1500I + 1000C + d_4^- - d_4^+ = 10000$
4. $45I + 30C + d_5^- - d_5^+ = 185$

- Função Objectivo

$$\text{Min } Z = P_1(d_1^- + d_2^-) + P_2 d_3^+ + P_3 d_4^- + P_4 d_5^+$$

- Todas as variáveis ≥ 0

Aplicação Prática – Lixo nas Cidades

Uma dada cidade, tem 5 pontos de recolha de lixo e três incineradoras para processar este lixo. A informação julgada relevante é apresentada na tabela seguinte:

Ponto de Recolha	Incinerador (Custo de Transporte €/Ton)			Lixo Semanal (Ton)
	1	2	3	
A	220	70	85	220
B	90	96	110	500
C	110	55	78	1400
D	95	80	97	600
E	85	94	55	900
Capacidade Semanal (Ton)	1500	700	1800	

Foram definidos os seguintes objectivos:

1. Não exceder o orçamento de €2400000 destinado à gestão dos lixos;
2. Minimizar o excesso da procura no incinerador 1 e 3;
3. Minimizar o excesso da procura no incinerador 2;
4. Minimizar o sub-atingimento da oferta em todos os cinco pontos de recolha.

A1 = Número de toneladas de lixo a enviar do posto de recolha A para o incinerador 1

...

E3 = Número de toneladas de lixo a enviar do posto de recolha E para o incinerador 3

- Restrições das Metas

1. $220A1 + 70A2 + \ldots + 94E2 + 55E3 + d_1^- - d_1^+ = 2400000$
2. $A1 + \ldots + E1 + d_2^- - d_2^+ = 1500$
   $A3 + \ldots + E3 + d_3^- - d_3^+ = 1800$
3. $A2 + \ldots + E2 + d_4^- - d_4^+ = 700$
4. $A1 + \ldots + A3 + d_5^- - d_5^+ = 220$
   $B1 + \ldots + B3 + d_6^- - d_6^+ = 500$
   ... ...
   $E1 + \ldots + E3 + d_9^- - d_9^+ = 900$

- Função Objectivo

$$\text{Min } Z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_3^+) + P_3 d_4^+ + P_4(d_5^- + d_6^- + d_7^- + d_8^- + d_9^-)$$

- Todas as variáveis ≥ 0

Problemas Especiais na Programação por Objectivos

Como vimos a resolução computacional destes problemas é baseada no algoritmo de simplex da Programação Linear. Por isso, tal como no caso da programação linear, um número de problemas especiais podem acontecer aquando da resolução destes problemas.

Soluções Óptimas Alternativas

As soluções óptimas alternativas podem acontecer, na Programação por Objectivos, tal como na programação linear quando, no quadro óptimo, uma variável não básica, tenha uma coluna de zeros na linha Z_j-C_j em todos os níveis de prioridade e exista pelo menos um valor positivo a_{ij} na correspondente coluna. A solução óptima alternativa é determinada calculando um novo quadro.

Esta situação é rara na PO e não ocorre se os objectivos estiverem em conflito e:

- Existir apenas uma variável de desvios em cada nível de prioridade;
- Às variáveis de decisão no mesmo nível de prioridade forem atribuídas diferentes pesos

Soluções Ilimitadas

As soluções ilimitadas não ocorrem na PO, porque cada restrição (isto é objectivo) tem associado um valor na parte direita da restrição. Por conseguinte, qualquer solução satisfaz ou não satisfaz esse valor da restrição. Isto implica que no método modificado do simplex se procure uma solução que satisfaça um dado objectivo e não uma solução que de forma absoluta optimize o valor desse objectivo.

Assim, independentemente de quanto o valor aumente a parte direita da restrição, o problema ainda em uma solução implementável. Esta situação é detectada quando na linha *Pivot* não existirem coeficientes positivos. Tal como nos problemas de PL esta situação acontece porque foi omitida uma restrição estrutural.

Soluções Inviáveis

Na PO a inviabilidade, não é, geralmente, um problema porque as variáveis de decisão são empregues numa tentativa de satisfazer os vários objectivos, que são escritos como restrições. Contudo, pode ocorrer um tipo de inviabilidade na PO, se se estabelecer um conjunto de restrições estruturais (absolutas) na prioridade mais alta.

A inviabilidade para este caso representa, uma solução não implementável e é indicada por uma solução. Na prática, isto indica que estes objectivos absolutos devem ser modificados (não devem ser considerados absolutos quando primeiramente constatados) ou que mudanças estruturais (aumento dos recursos limitados, por exemplo) necessitam ser considerados.

Esta situação acontece quando no quadro óptimo do *simplex* permanece uma variável artificial com um valor diferente de zero.

Empate na Variável que entra na Base

Pode ocorrer um empate da variável a entrar na base entre os valores Z_j-C_j em dada linha (isto para uma dada prioridade) do quadro do *simplex*. Este empate pode ser quebrado arbitrariamente ou então, escolher a variável que tenha o maior valor Z_j-C_j nas respectivas colunas, correspondentes a prioridades mais baixas, de forma sequencial, - esta coluna representa a coluna Pivot.

Empate na Variável que sai da Base

No processo do *simplex* da PO a variável que abandona a base é determinada pelo rácio não negativo mais pequeno que é calculado por b_i/a_{ij} (a_{ij} da coluna Pivot) – a linha Pivot.

Se dois ou mais rácios tiverem o mesmo valor, o empate poder ser quebrado escolhendo a linha associada com a prioridade mais alta (reportando-nos às prioridades como estão definidas na coluna C_b do quadro do *simplex*). Se ambas as linhas tiverem a mesma prioridade escolher a variável que esteja situada mais acima na base no quadro do *simplex*.

Contudo, pode acontecer, em certos casos, que as variáveis em consideração não estejam associadas a prioridades. Teoricamente, pode acontecer a degeneração do problema de PO mas na prática não ocorre.

Valores Negativos da parte Direita das Restrições

No procedimento do método de *simplex* não são permitidos valores negativos da parte direita das restrições. Podemos evitar estes valores se multiplicarmos toda a restrição por -1. Contudo, esta modificação deve ser feita depois de as variáveis de desvios correspondentes terem sido acrescentadas.

Por exemplo a restrição:

$3A + 4B + d_1^+ - d_1^- = -500$ mudará para $-3A - 4B - d_1^+ + d_1^- = 500$

A variável correcta a aparecer na função objectivo é determinada pela análise da restrição original e não pela nova restrição. Assim, se o nosso objectivo for alcançar ou exceder -500 então d_1^- deve aparecer na função objectivo; se o objectivo for o sub-atingimento do -500 então o d_1^+ deve figurar na função objectivo.

Dualidade e Análise de Sensibilidade na PO

Tal como na programação linear, a teoria da dualidade e análise de sensibilidade pode ser considerada num contexto de PO.

Muito embora de interesse e de importância para a PO, esta área estão fora do contexto do nosso estudo. O leitor mais interessado poderá recorrer ao trabalho de Lee (1972) e Ignizio (1976) para um discussão aprofundada destes tópicos.

Podem acontecer ocasiões, em que o exame da solução do *output* do computador mostre que todas as prioridades foram atingidas, isto é as variáveis de desvios são iguais a zero. Embora pareça motivo de contentamento também indica que os objectivos fixados não eram demasiados ambiciosos.

As expectativas de um ou mais objectivos classificados como mais prioritários podem ser aumentados sem ferirem o desempenho dos restantes objectivos perante os recursos disponíveis.

Contrariamente à programação linear, num problema de PO não existe um conjunto de parâmetros que sejam automaticamente classificados, tais como os preços sombra ou os custos de oportunidade.

Por esta razão podem ser equacionadas cinco questões para dado problema de PO:

- Qual o impacto que o arranjo hierárquico dos vários objectivos tem na solução óptima? As diferentes opõem de arranjo dos objectivos de forma hierárquica representam as exigências mais actuais?
- Qual é a análise de sensibilidade da parte direita das restrições associadas com os objectivos? Em que ponto é que a mudança nestes valores causa uma mudança na solução óptima actual?
- Num problema de PO de quanto podem variar as ponderações de uma dada prioridade antes que a solução óptima seja alterada?

- O que acontece à solução óptima se se diminuir levemente a importância de um objectivo de forma a aumentar o nível de satisfação de um objectivo classificado de menos important5e?
- Como é feita a troca entre as diferentes variáveis de desvios dos objectivos competitivos?

Muito embora existam vários estudos relativos à dualidade da PO este valor da dualidade não é tão aparente como na programação linear. Uma importante razão é devida ao facto de os objectivos da gestão não estarem sujeitos a mudanças aleatórias ou irracionais em oposição às mudanças de c_j dos modelos de programação linear.

Por outras palavras, se o decisor considerar um dado objectivo como o mais importante não estará interessado numa análise sistemática da mudança da solução óptima se este objectivo descer a sua importância para um nível mais baixo.

Outras razão é que a informação obtida através do modelo dual é facilmente derivada do quadro final da solução primal. Por exemplo, a troca entre dois objectivos conflituosos pode ser facilmente acomodada pela análise de sensibilidade sem o modelo dual.

Em situacões do mundo real, muitos parâmetros mudam em simultâneo pelo que uma análise simples baseada em certa informação derivada do modelo dual tem um valor muito diminuto.

Programação por Objectivos Inteira

Em muitos problemas práticos com objectivos conflituosos as variáveis de decisão apenas assumem significado se tomarem valores inteiros. Neste caso as variáveis podem representar pessoas, linhas de montagem, projectos variados, componentes de equipamentos, etc.

As variáveis discretas podem obter-se facilmente arredondando os valores das variáveis de decisão obtidas pelo algoritmo do simplex para a PO. Contudo, este procedimento de arredondamento para o inteiro mais próximo frequentemente produz uma solução inviável ou não óptima. Se os valores das variáveis são muito pequenos, como nos casos de problemas 0-1, podem produzir erros muito grosseiros. Assim, existe uma necessidade de desenvolver algoritmos eficientes que permitam resolver problema de PO inteiros.

Software de Computador para a PO

Comparado com o software disponível para resolver problemas de Programação Linear, podemos dizer que os programas de computador para resolver este tipo de problemas são escassos.

Felizmente, contudo, que mesmo assim existem vários programas que podemos usar:

- James Ignizio, *Microsolve – Goal Programming Via Multiplex-1*, versão 1, 1983, Oakland, CA: Holden Day;
- Sang Lee e Yum Shim, *Micro Manager*, Dubuque, IA: Brown, 1986
- Kiron Desesi, WinQSB, John Wiley & Sons, 2003
- WinQSB, Prentice-Hall, 2005.

Sumário

A moderna decisão, envolve problemas em que o decisor gosta de tomar em consideração, na resolução de problemas, objectivos múltiplos e frequentemente conflituosos.

A Programação por Objectivos permite ao decisor incluir na formulação do problema vários objectivos ou metas, muitas vezes incomensuráveis e conflituosos.

Assim, este tipo de programação representa uma ferramenta poderosa e útil ao dispor do decisor.

Bibliografia

- Arthur J L e Ravindran "An Efficient Goal Programming Algorithm Using Constraint Portioning and Variable Elimination", *Management Science* 24, 1978, 867.68;
- Abadie, J, *Integer and Nonlinear Programming*, New York: American Elsevier Publishing Company, 1967;
- Balas, E "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables", *Operations Research* 13, 1965: 517-46;
- Bazarra, Mokhtar e Aziz Bouzaher "A Linear Goal Programming Model for Developing Economies and an Illustration from Agricultural Sector in Egypt", *Management Science* 27, (nº4: Abril), 1981;
- Booler, J M P, "The Solution of a Railway Locomotive Scheduling Problem", *Operations Research* 31, 1980;
- Bres, E S, D Burns, A Charnes e W W Cooper "A Goal Programming Model for Planning Officer Accessions", *Management Science* 26 (nº8: Agosto), 1980;
- Capettini, Robert e Howard Toole, "Designing Leveraged Leases: A Mixed Integer Linear Programming Approach", *Financial Management* (Autumn) 1981, 15-23;
- C A DeKluyer "An Exploration of Various Goal Programming Formulations with Applications to Advertising Media Scheduling", *Journal of the Operational Research Society*, 30, nº2, 1979, 161-171;
- Charnes A e W W Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1961;
- Dantzig, G B "On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables", *Econometrica*, 28, 1960: 30-44;
- Geoffrion, A M "Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas Method", *SIAM Review* 9, 1967: 178-90;
- Glover, F "A Multiphase Dual Algorithm for de Zero-One Integer Programming Problem", *Operations Research* 13, 1965: 879-919;
- Gomory, R E "An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs", In *Recent Advances in Mathematical Programming*, Edited by R L Graves e P Wolfe, New York: McGrawHill, 1963;
- Ignizio, J P *Goal Programming and Extensions*, Lexington, Mass: D C Heath & Co, 1976;
- Ijiri, Y, *Management Goals and Accounting for Control*, Chicago; Rand McNally Company, 1965;
- James P. Ignizio, Tom M. Cavalier *Linear Programming*, Prentice Hall, 1994;
- Jaaskelainen, V *Accounting and Mathematical Programming*, Helsinki: Research Insstitute for Business and Economics;
- Joiner, Carl e Albert Drake "Planning and Budgeting in the Criplled Children's Sector through Goal Programming", *American Journal of Public Health* 71 (nº9: Setembro), 1981;
- Jonas Lawrence e N K Kwak "A Goal Programming Model for Allocating Human Resources for Good Laboratory Practice Regulations", *Discrete Sciences* 13, 1982;
- J P Ignizio "An Approach to the Capital Budgeting Problem with Multiple Objectives", *The Engineering Economist*, 21, nº4, 1976, 259-272;
- Land, A H e Doig, A G "An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems", *Econometrica* 28, 1960: 497-520;
- Lawler, E L e Wood, D W "Branch and Bound Methods – A Survey", *Operations Research* 14, 1966: 699-719;
- Lee, S M *Goal Programming for Decision Analysis*, Philadelphia: Auerbach Publishers, Inc, 1972;
- Leonid N. Vaserstein, *Introduction to Linear Programming*, Prentice Hall, 2003;
  Little, J D e al "An Algorithm for the Salesman Problem", *Operations Research* 11, 1963: 972-89;
- Loomba, N P e Turban, E, *Applied Programming for Management*, New York, Holt, Rinehart and Windton, 1974;

- Kendall, Kenneth e Sang Lee "Formulating Blood Rotation Policies with Multiple Objectives", *Management Science* 26,(nº11:Novembro), 1980;
- K M El-Sheshai, G B Harwood e R H Hernanson "Cost Volume Profit Analysis with Integer Goal Programming, *Management Accounting*, Outubro, 1977, 43-47;
- Krajewski, Lee J, Larry P. Ritzman, *Operations Management and Student CD Package, 7/E*, Prentice Hall, 2004;
- Marsten, Roy E, Michael R Muller e Christine L Killion, "Crew Planning at Flying Tiger: A Successful Application of Integer Programming", *Management Science* 25, nº12, (December), 1979;
- McMillan, C Jr, *Mathematical Programming*, New York: John Wiley & Sons, 1970;
- Mitten, L G "Branch and Bound Methods: General Formulation and Properties", *Operations Research* 18, 1970; 24-34;
- Moore, Jeffrey H.e Larry R. Weatherford, *Decision Modelling with Microsoft® Excel, 6/E*, Prentice Hall, 2001;
- Murty, Katta G, *Operations Research: Deterministic Optimization Models*, Prentice Hall, 1995;
- R G Schroeder "Resource Planning in University Management by Goal Programming", *Operations Research*, Julho de 1974, 700-710;
- Rardin, Ronald L, *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, 1998;
- Ruth, R Jean, "A Mixed Integer Programming Model for Regional Planning of a Hospital Impatient Service", *Management Science*, 5 (May) 1981;
- Salvia, Anthony e William Ludwig "An Apllication of Goal Programming at Lord Corporation", Interfaces 9, (nº4: Agosto), 1979;
- S M Lee e M M Bird "A Goal Programming Model for the Sales Effort Allocation", *Business Perspectives*, Julho, 1970, 17-21;
- S M Lee e A J Terro "Optimizing the Portfolio Selection for Mutual Funds", *The Journal of Finance*, Dezembro, 1973, 1086-1101;
- S M Lee e L J Moore "Multi-Criteria School Busing Models", *Management Science*, 23, Março, 1977, 703-714;
- Shapiro, Monroe, "Scheduling Crewmen for Recurrent Training", *Interfaces* 11, nº5 (October), 1981;
- Taha, Handy, *Operations Research: An Introduction, 7/E*, Prentice Hall, 2005;
- Taylor, Bernard, *Introduction to Management Science and Student CD*, 8ªEdição, Prentice-Hall, 2004;
- Zionts, S, *Linear and Integer Programming*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1974;
- Wagner, H *Principles of Operations Research*, Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall, 1975;
- Wilson, J M "The Scheduling of Magistrates to Courts", *Operations Research* 32, nº2, 1981.

Questões e Problemas

1. Uma dada Câmara Municipal está a analisar dois projectos. Cada unidade do projecto A custa €800, gera 40 postos de trabalho e tem um retorno anual de €400. Cada unidade do projecto B custa €1200, gera 80 postos de trabalho e tem um retorno de €450. A Câmara pretender alcançar as seguintes metas:

   M_1: Não gastar mais de €5000;
   M_2: Criar no mínimo 120 postos de trabalho;
   M_3: Maximizar o retorno no fim do ano.

   A meta 1 é duas vezes mais importante do que a meta 2 e a meta 2 é cinco vezes mais importante que a meta 3.

   - Encontre a solução óptima utilizando o método do *simplex.*

   Supondo agora que, as metas são classificadas de acordo com a seguinte prioridade:

   P_1: Não gastar mais de €5000;
   P_2: Criar no mínimo 120 postos de trabalho;
   P_3: Maximizar o retorno no fim do ano.

   - Use a análise gráfica para encontrar o número óptimo de unidades a abraçar de cada projecto.
   - Os objectivos são atingidos? Se não, quais são os desvios por defeito?
   - Qual o retorno gerado e o número de postos de trabalho criados?

2. Resolva o seguinte problema pelo método gráfico e pelo método do *simplex* modificado.

   Min Z = $P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + 6P_3 d_3^+ + 5P_3 d_4^+ + 6P_4 d_4^- + 5P_4 d_3^-$
   Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
50A + 60B + d_1^- - d_1^+ &= 1200 \\
10B + d_2^- - d_2^+ &= 110 \\
10A \qquad + d_3^- - d_3^+ &= 240 \\
100B + d_4^- - d_4^+ &= 300
\end{aligned}
$$

   Todas as variáveis ≥ 0

3. Resolva o seguinte problema pelo método gráfico e pelo método de *simplex* modificado.

   Min Z = $P_1 d_2^- + P_2 d_1^+ + P_3 d_3^-$
   Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
A + B + d_1^- - d_1^+ &= 20 \\
2A + 3B + d_2^- - d_2^+ &= 16 \\
B + d_3^- - d_3^+ &= 14
\end{aligned}
$$

   Todas as variáveis ≥ 0

4. Um gestor de produção tem dois operários para atribuir a duas máquinas. A capacidade de processamento da máquina 1 é de 5 unidades por hora e a da máquina 2 de 6 unidades por hora.

   O tempo de produção normal de cada máquina é de 8 horas. O gestor tem os seguintes objectivos para o próximo dia:

   P_1: Evitar produzir menos do que 120 unidades do produto;
   P_2: Evitar trabalho extraordinário na máquina 2 a mais de 3 horas;
   P_3: Minimizar a soma do trabalho extraordinário (nota: atribuir diferentes ponderações de acordo com o custo relativo das horas extraordinárias – assuma que o custo de operações das duas máquinas é o mesmo);
   P_4: Evitar o sub-atingimento das horas normais de produção (atribua ponderações de acordo com a produtividade relativa das duas máquinas).

   Ajude o gestor a resolver o problema.

5. A fábrica de carros BUICK, tem dois armazéns, de onde distribui os seus carros por três clientes. Durante o período considerado a empresa não consegue satisfazer a procura.

   Contudo, ela determinou que a procura de alguns clientes deve ser satisfeita à custa de outros. Para evitar atritos, é importante balancear a proporção da procura entre os clientes.

   Também devido a problemas sindicais, a empresa deve satisfazer quantidades mínimas a enviar por determinados caminhos. Finalmente, alguns dos caminhos por onde os produtos devem ser enviados são perigosos e por isso devem ser evitados.

   A tabela seguinte sumaria alguma informação importante.

De	Clientes			Oferta
	1	2	3	
Armazém 1	10	4	12	3000
Armazém 2	8	10	3	4000
Procura	2000	1500	5000	

   A gestão estabeleceu as seguintes metas classificadas de acordo com a sua prioridade:

   1. Satisfazer toda a procura do cliente 3 (distribuição garantida).
   2. Satisfazer pelo menos 75% da procura de cada cliente.
   3. Minimizar o custo total de transporte dos bens transportados.
   4. Enviar pelo menos 1000 unidades pelo caminho: armazém 2 – cliente 1 (exigência do sindicato).
   5. Minimizar o envio de carros através do caminho: armazém 1 – cliente 3 e armazém 2 – cliente 2 (perigosos).

6. Balancear a percentagem da procura satisfeita entre o cliente 2 e 3.

Formule o problema apresentado de modo a poder determinar o número de carros a enviar a cada cliente.

6. Num problema de programação por metas, a restrição relativa ao trabalho é o seguinte:

$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 + d_4^- - d_4^+ = 100$ horas

Uma nova meta, número 5 decide limitar as horas extraordinárias a 10 horas. Mostre duas maneiras de escrever esta restrição.

Mostre também a alteração a fazer à função objectivo para incorporar esta meta.

7. O quadro seguinte representa uma iteração na resolução de um problema de programação por metas:

MIN P1D1ME + 5P3D2ME + 3P3D3ME + P4D1MA + P2D4MA
Sujeito a:

0	1X1+1X2+1D1ME – 1D1MA = 80
1	1X1+1D2ME = 70
2	1X2+1D3ME = 45
3	1X1+1X2+1D4ME – 1D4MA = 90

	c_j	0	0	P1	5P3	3P33	0	P4	P2	
c_B	Base	X1	X2	D1ME	D2ME	D3ME	D4ME	D1MA	D4MA	b_I
P1	D1ME	0	1	1	-1	0	0	-1	0	10
0	X1	1	0	0	1	0	0	0	0	70
3P3	D3ME	0	1	0	0	0	0	0	0	45
0	D4ME	0	1	0	-1	1	1	0	-1	20
Zj-Cj	P4	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
	P3	0	3	0	-5	0	0	0	0	135
	P2	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	P1	0	1	0	-1	0	0	-1	0	10

Execute mais uma iteração:

- Diga se a solução encontrada é óptima e porquê.
- Explique a mudança dos valores das prioridades de um quadro para o outro.

8. Explique de forma concisa, mas sucinta, o critério de optimização da programação por metas. Refira as conclusões que o gestor pode tirar do quadro óptimo do *simplex* na programação por metas.

9. O Sr José acabou de ganhar 40000 euros na lotaria. A sua idade avançada leva-o a pedir-lhe ajuda de modo a rentabilizar o investimento.

Existem cinco alternativas viáveis onde o Sr José pode empregar o seu dinheiro: antiguidades, títulos do tesouro, obrigações, depósitos bancários e diamantes.

Os títulos do tesouro e as obrigações dão 17% e 12% de rendimento, respectivamente, e os depósitos bancários dão 6%. A opção de investimento em diamantes e antiguidades é muito arriscada, pelo que se assume que não terá qualquer taxa de rendimento.

O Sr José estabeleceu as seguintes metas classificadas de acordo com a sua importância:

1. Minimizar o risco diversificando o investimento. Não mais de 40% do investimento total deve ser investido em qualquer alternativa;

2. Uma vez que existe um rumor de os diamantes valorizarem muito nos próximos anos, o Sr José deseja investir pelo menos 10000 euros nesta alternativa;

3. A quantia a investir em bens especulativos (antiguidades e diamantes) não deve exceder a quantia investida nas outras alternativas;

4. Garantir que o Sr José ganhe pelo menos 5000 euros anualmente pelo seu investimento.

Determine a quantia a investir em cada uma das alternativas.

10. Um Instituto Politécnico está a fazer um esforço na área do desporto. Disponibilizou €800000 para o próximo ano. As bolsas para os estudantes são fixadas em €5000 para os estudantes Portugueses e €6000 para os estudantes não Portugueses. Os estudantes designados de excelentes recebem um adicional de €2000.

Foram definidas as seguintes metas para a atribuição de bolsas:

P_1: Pelo menos 60% das bolsas devem ser para estudantes Portugueses;
P_2: Pelo menos 35% de todas as bolsas devem ser para atletas femininas;
P_3: Não mais de 10% das bolsas devem ser dadas a estudantes classificados de excelentes.

Ajude o Instituto a resolver o problema com que se debate.

11. Uma empresa recebeu uma encomenda de 800 unidades de um produto que pode ser produzido em duas máquinas que estão correntemente disponíveis. A máquina A tem 44 horas de tempo de produção disponíveis e a máquina B 60 horas.

A máquina A custa €15 por hora a operar e produz 6 unidades do produto por hora. A máquina B custa €17 por hora a operar e produz 4.5 unidades por hora. O gestor estabeleceu os seguintes objectivos:

P_1: Satisfazer a encomenda de 800 unidades;
P_2. Não utilizar mais de 12 horas de trabalho extraordinário no conjunto das duas máquinas;
P_3: Evitar a sub-utilização de horas em ambas as máquinas;
P_4: Não dispender mais de €2000 na produção, excluindo o tempo extraordinário e outros custos.

Ajude a empresa a resolver o problema.

12. Uma empresa produz dois produtos: A e B. A procura semanal dos dois produtos é de 800 e 600 unidades, respectivamente. A empresa tem uma capacidade de produção de 1300 horas semanais e o produto A precisa de 1 hora de tempo de produção e o produto B precisa de 2 horas.

Cada unidade do produto A dá um lucro de €20 e cada unidade do produto B dá um lucro de €30. A empresa listou os seguintes objectivos:

P_1: Conseguir um lucro o mais próximo de €15000 por semana;
P_2: Evitar a sub-utilização da capacidade produtiva;
P_3: Satisfazer o mais possível a procura semanal dos dois produtos.

Ajude o gestor a resolver este problema.

13. O Pelouro do Ambiente de uma cidade está a planear uma campanha promocional de poupança de energia. Indiferentemente de os anúncios serem na televisão ou na rádio estabeleceu as seguintes metas:

P_1: Não deve ser excedido o orçamento disponível para esta campanha de €150000;
P_2: Deverá existir uma mistura entre os anúncios na televisão e na rádio com pelo menos 10 anúncios na televisão (custam €7500 cada) e pelo menos 20 anúncios na rádio (custam €2000 cada);
P_3: O número total de pessoas que vêm os anúncios deve ser no mínimo igual a 9 milhões de pessoas. Cada anúncio na televisão atinge 300000 pessoas e na rádio 150000 pessoas.

Ajude o responsável do Pelouro do Ambiente a resolver o problema.

14. Uma empresa produz três produtos diferentes. A tabela seguinte apresenta a informação julgada relevante:

Produto	Trabalho (horas/unidade)	Matérias Primas (Kgs/unidade)	Lucro Unitário (€)
1	5	4	3
2	2	6	5
3	4	3	2
Disponibilidade	240	400	

1. Devido a dificuldades laborais, a gestão deseja evitar a sub-utilização da capacidade normal de produção (isto é, não despedir trabalhadores);

2. A gestão estabeleceu um nível satisfatório de lucro de 500 euros por dia;

3. O recurso a horas extraordinárias deve ser evitado o mais possível;

4. A gestão pretende minimizar a compra de matérias-primas adicionais devido a problemas de armazenamento.

A gestão pretende satisfazer estas metas o mais possível.

15. Um agricultor possui 100 hectares de terra, em que pretende plantar milho, trigo e ervilhas.

Cada hectare de milho custa 100 euros de preparação, precisa de 7 dias de trabalho e dá 30 euros de lucro. Um hectare de trigo precisa de 120 euros de preparação, precisa de 10 dias de trabalho e dá 40 euros de lucro. Um hectare de ervilhas custa 70 euros de preparação, precisa de 8 dias de trabalho e dá de lucro 20 euros.

O agricultor pediu um empréstimo de 80000 euros para a preparação das colheitas e contratou uma força de trabalho de 6000 dias.

Um ganadeiro acordou comprar-lhe 20 hectares de milho, 50 hectares de trigo e 30 hectares de ervilhas.

O agricultor estabeleceu as seguintes metas classificadas de acordo com a sua prioridade:

1. O agricultor pensa que a força de trabalho deve ser mantida de modo a evitar questões laborais com os sindicatos;
2. Os custos de preparação não devem exceder o montante do empréstimo evitando-se assim o recurso a novo empréstimo;
3. O agricultor deseja ter um lucro de, pelo menos, 105000 euros de modo a poder manter uma boa condição financeira;
4. O recurso a trabalho adicional deve ser evitado;
5. O agricultor deseja usar o maior número de hectares possível;
6. O agricultor deseja honrar o contrato promessa estabelecido com o ganadeiro (ponderações devem ser usadas de acordo com o lucro fornecido por cada colheita).

Determine o número de hectares que o agricultor deve destinar a cada tipo de colheita de modo a satisfazer, o mais possível, as metas fixadas.

16. O Sr Donato foi recentemente nomeado pelo Sr Narciso, presidente do Clube Nariocas, para orientar a sua campanha de re-eleição. O Sr Narciso, pensa que se o Sr Donato fizer chegar a sua mensagem a 2 milhões de associados, ele tem grandes hipóteses de ganhar a presidência.

O Sr Donato reuniu a seguinte informação sobre os diversos meios de publicidade disponíveis bem como os seus custos:

Meio de Publicidade	Pessoas por €1000 de Investimento	Custo por Anúncio - €	Número Máximo de Anúncios
Televisão (especial)	20000	500	60
Televisão (não especial)	8000	400	60
Rádio	7000	300	100
Jornal	5000	200	120
Panfletos	750	100	150

O Sr Narciso pode dispor de 160000 euros, o que de acordo com a lei, não podem ser excedidos. Além disso, não mais de 60000 euros podem ser dispendidos em anúncios na televisão (um limite legal de 60 unidades).

O Sr Narciso determinou os seguintes objectivos para a sua campanha, classificados da seguinte maneira:

1. Conseguir que as suas exposições sejam vistas por 2 milhões de associados;

2. Evitar dispender mais de 160000 euros;

3. Dispender pelo menos 15000 euros em anúncios em jornais;

4. Maximizar o número de pessoas que vêm os anúncios publicitários (televisão).

O Sr Donato está tentando encontrar a estratégia de publicidade para promover o presidente Narciso. Como um consultor especial, ajude o Sr Donato a escolher a estratégia eleitoral para re-eleger o Sr Narciso como Presidente.

17. Um comerciante de sementes especializou-se na venda de trigo. Tem um perfeito conhecimento do custo a que pode comprar e vender o trigo durante os próximos 4 meses.

A venda do trigo está condicionada pela capacidade de armazenamento do comerciante. A capacidade normal de armazenamento de trigo é de 3000 toneladas (podendo em situações de emergência armazenar mais 2000 toneladas).

O custo C_i e o preço P_i de venda estimados para os próximos 4 meses são os seguintes, por tonelada:

	Meses			
	1	2	3	4
Custo (C_i)	4	4	4	7
Preço (P_i)	6	7	7	6

A quantidade de trigo a comprar está inteiramente dependente da receita gerada pelas vendas. Também é assumido que as vendas são feitas no início do mês seguindo-se as compras.

No início do primeiro mês existem 2000 mil toneladas de trigo em armazém. O presidente da firma estabeleceu as seguintes metas, classificadas de acordo com a sua importância no que respeita aos objectivos a serem conseguidos nos próximos quatro meses:

1. No primeiro mês, apenas a capacidade normal do armazém deve ser utilizada;

2. A firma deve ter pelo menos 20000 euros para compras no início do quarto mês;

3. A firma deve reservar no mínimo 2000 euros em cada mês de modo a fazer face a emergências;

4. O comerciante pretende maximizar o lucro total durante o período de 4 meses.

Aponte o esquema de vendas e compras a seguir pelo comerciante de modo a satisfazer as metas fixadas.

18. Uma loja de roupa, sucursal de uma grande cadeia, é especializada na venda de roupa de homem. Neste momento trabalham na loja, 1 gestor com salário fixo e 8 vendedores em *part-time* que ganham €4 à hora mais 20% de desconto na roupa que comprem na loja. Entre os 8 vendedores, 4 são experientes e os restantes são novos no trabalho.

Todos os meses a loja tem de cumprir determinados objectivos de venda. Para o próximo mês o objectivo é vender €50000. O gestor atribuiu €30000 para si e €20000 para os outros vendedores. Dos registos anteriores o gestor vende de tecidos, €100, por hora. Os quatro vendedores experientes vendem (cada um) €65 por hora e os 4 quatro não experientes vendem (cada um) €55. O gestor trabalha normalmente 188 horas por mês e os vendedores em *part-time* 50 horas cada.

Contudo, o gestor pensa que precisa de recorrer a horas extraordinárias para satisfazer os objectivos de venda. Pretende limitar as suas horas extraordinárias a 50 horas pois pensa assim conseguir alcançar a sua quota de vendas e ganhar um ordenado suficiente.

Como incentivo para o gestor e para os outros vendedores a cadeia oferece bónus e planos de comissões. O gestor recebe 3% de bónus do total do volume de vendas realizadas na loja acima da sua quota mensal. O objectivo do gestor é ganhar em média €100 por mês deste plano de bónus.

Os outros vendedores recebem 5% de comissão de todas as vendas acima das suas quotas. O bónus é dividido de igual forma por todos eles. O gestor pensa que se os vendedores puserem um determinado empenho conseguem €20, cada um, por mês em comissões.

O gestor definiu os seguintes objectivos:

P_1: A loja deve atingir a sua quota de vendas;

P_2: O gestor pretende atingir a sua quota de venda de €30000;

P_3: O gestor pretende limitar as suas horas extraordinárias a 50 horas por mês;

P_4: Os vendedores devem atingir a sua quota de €20000 por mês;

P_5: O gestor pretende que os vendedores trabalhem 400 horas por mês;

P_6: O gestor pretende ganhar €100 em bónus e também que os vendedores recebam €20 cada um, por mês;

P_7: Se possível, o gestor não quer trabalhar mais de 188 horas por mês;

P_8: O gestor pretende minimizar o número de horas extraordinárias que trabalham os vendedores por mês.

Ajude o gestor a planificar o seu trabalho.

19. O responsável pelas escolas primárias de dado distrito foi informado pelo governo central, que deve ser estabelecido um balanço racial entre as três escolas existentes em dada região, fazendo uso extensivo de autocarros.

O problema é sumariado na tabela seguinte:

Área	Escola A	Escola B	Escola C	Alunos
1	4	8	8	400 brancos 200 pretos
2	16	24	16	300 brancos 300 pretos
3	8	16	24	300 brancos 500 pretos
Capacidade	500	600	400	

Os números apresentados representam o custo de transporte (em euros), por aluno, de cada zona para cada escola. Os dados relativos à capacidade representam o número de alunos a afectar a dada escola de modo a poder ser providenciado um "ensino de qualidade".

O número de alunos em cada área é dividido em dois grupos raciais: brancos e pretos.

O responsável local pelo distrito estabeleceu as seguintes metas numa escala ordinal de importância:

1. O transporte que demore mais de 30 minutos (a um custo de 20 euros ou mais) deve ser evitado;
2. Fornecer oportunidades de educação para cada aluno;
3. Encontrar o balanço racial entre as diferentes escolas;
4. O excedente de alunos em relação à capacidade normal da escola deve ser igualmente (proporcional) partilhado pelas escolas;
5. O custo total do transporte deve ser minimizado.

Encontre o esquema de distribuição dos alunos pelas escolas de modo a serem satisfeitas as metas estabelecidas.

20. Um gestor de uma empresa está tendo problemas de atribuição entre as suas equipas de produção.

A taxa de produção da equipa X é de 8 unidades por hora, enquanto a taxa de produção da equipa Y é de 5 unidades por hora. As horas normais de trabalho para ambas as equipas são de 40 horas por semana.

O gestor da empresa classificou os seus objectivos de forma seguinte:

1. Evitar a sub-utilização do nível de produção de 550 unidades;

2. Quaisquer horas extraordinárias da equipa X além de 5 horas devem ser evitadas;

3. A soma das horas extraordinárias para ambas as equipas deve ser minimizada. (Atribua diferentes ponderações de acordo com o custo relativo de uma hora extraordinária – assuma que o custo de funcionamento das duas equipas é idêntico);

4. Qualquer sub-utilização das horas normais de trabalho deve ser evitada. Diferentes ponderações devem ser consideradas de acordo com a taxa de produtividade das duas equipas.

Ajude o gestor a resolver o problema.

21. Os responsáveis pela área recreacional e desportiva de uma cidade receberam um subsídio de 600000 euros, para expandirem as suas facilidades recreativas públicas.

Quatro tipos diferentes de facilidades foram pedidos pelos cidadãos: ginásios, campos de atletismo, campos de ténis e piscinas.

De facto, as exigências das diferentes comunidades foram de 7 ginásios, 10 campos de atletismo, 8 campos de ténis e 12 piscinas.

Contudo, cada facilidade custa uma certa importância, precisa de um certo número de metros quadrados e tem uma determinada taxa de uso. Estes parâmetros são mostrados na seguinte tabela:

Facilidade	Custo (€)	m^2	Utentes Esperados
Ginásio	80000	400	1500
Campo de Atletismo	24000	800	3000
Campo de Ténis	15000	300	500
Piscina	40000	500	1000

Os responsáveis pela parte recreacional têm, de momento, destinado para este tipo de facilidades 5000 metros quadrados de terra (embora possam comprar mais terra se necessário).

Estabeleceram os seguintes objectivos ordenados de acordo com a seguinte prioridade:

1. Todo o subsídio deve ser gasto caso contrário será devolvido à autoridade central;

2. Deseja-se que as facilidades sejam usadas por 20000 ou mais pessoas;

3. Desejam evitar comprar mais terra do que a que têm presentemente disponível;

4. Desejam satisfazer as solicitações dos cidadãos, isto é, construir na medida do possível as facilidades que estes desejam. Contudo, esta prioridade deve ser ponderada de acordo com o número estimado de pessoas que usarão cada facilidade;

5. Se se tiver de comprar mais terra, desejam que, no máximo, seja de 1000 metros quadrados.

22. Uma firma de electrónica produz televisões a cores. A empresa tem duas linhas de produção em funcionamento.

A taxa de produção da linha 1, é de 2 televisões por hora na linha 1 e de 1.5 na linha de produção 2. A capacidade regular de produção é de 40 horas por semana para cada linha. O lucro de cada televisão é de 100 euros. O gestor da firma pretende determinar o número de horas que deve usar em cada linha durante a semana.

A gestão estabeleceu as seguintes metas classificadas de acordo com a sua prioridade:

1. Fabricar 180 televisões por semana;

2. Limitar o recurso a horas extraordinárias da linha 1 a 5 horas;

3. Evitar a sub-utilização das horas normais de trabalho em ambas as linhas. Diferentes ponderações devem ser atribuídas de acordo com a taxa de produção de cada linha;

4. Limitar o uso do trabalho extraordinário em ambas as linhas. Diferentes ponderações devem ser atribuídas a cada linha de acordo com o custo relativo de uma hora extraordinária. É assumido que o custo de operação é igual para as duas linhas de produção.

Formule o modelo de programação por metas que lhe permite resolver o problema.

23. Uma pequena empresa produz máquinas e secadores de roupa. A produção de 1 unidade de qualquer destas máquinas precisa de 1 hora. A empresa tem uma capacidade de produção de 40 horas semanais.

Um máximo de 24 máquinas e de 30 secadores podem ser armazenados por semana. O lucro de cada máquina e de cada secador é de 80 e 40 euros, respectivamente.

A gestão determinou as seguintes metas arranjadas de acordo com a sua prioridade:

1. Evitar a sub-utilização da capacidade normal de produção;

2. Produzir o maior número possível de máquinas e de secadores. Contudo, uma vez que o lucro de uma máquina é de duas vezes o lucro de um secador, a gestão está interessada duas vezes mais em produzir as máquinas do que os secadores;

3. Minimizar o recurso a horas extraordinárias o mais possível.

24. A empresa AEROL, desenvolveu recentemente três novos produtos que podem ser produzidos usando o excesso da capacidade existente nas suas três secções de produção.

Cada produto pode ser fabricado em qualquer das três secções. Uma análise mostrou ser rentável, usar o excesso da capacidade na produção desses produtos. De facto, o objectivo principal da gestão em desenvolver estes novos produtos é o de conseguir usar o excesso de capacidade produtiva de uma forma rentável.

Genericamenté a AEROL, trabalha no limite da capacidade máxima de produção. A produção a um limite de capacidade inferior à máxima ocorre devido sobretudo a problemas com a força de trabalho.

Muito embora a AEROL, não precise de toda a força de trabalho durante estes períodos, contudo o custo de despedimento é considerável e a AEROL deseja evitar o despedimento o mais possível. Ainda mais, a AEROL, deseja balancear a utilização do excesso de capacidade entre as três secções de produção.

Para o período em consideração, as secções têm o seguinte excesso de capacidade (por unidades de novos produtos) de produção e armazenamento (em metros cúbicos):

Secção	Excesso de Capacidade Produtiva (horas)	Capacidade Armazenamento
1	750	12000
2	300	10000
3	450	6500

A tabela seguinte apresenta as necessidades produtivas de cada produto em cada secção, expresso em minutos por unidade.

Produto	Secção		
	1	2	3
1	3	5	4
2	5	6	4
3	8	10	12

Os produtos 1, 2, 3 precisam de 30, 20 e 15 metros cúbicos por unidade, respectivamente e têm uma contribuição unitária para o lucro de €15, €18 e €12.

A previsão de vendas indica à AEROL, que pode vender 900, 1000 e 700 unidades do produto 1, 2 e 3, respectivamente.

A gestão da AEROL, definiu as seguintes metas classificadas de acordo com a sua preferência:

1. Ter um lucro de 15000 euros;

2. Usar o máximo possível do excesso da capacidade disponível. Devido ao custo do trabalho, a gestão pensa que é 1.5 vezes mais importante usar o excesso da secção 1 do que a da 2 e 3;

3. Conseguir um balanceamento na força de trabalho aquando da utilização do excesso de capacidade das três secções. Devido a certas exigências extras por parte dos trabalhadores da secção 1, a gestão pensa que se não ocorrer um balanceamento da força de trabalho, é de duas vezes mais importante que este seja a favor de ter a secção 1 a utilizar menos trabalho do que mais, relativamente às secções 2 e 3;

4. Conseguir realizar as vendas previstas para o produto 2, pois este é o que tem maior contribuição para o lucro;

5. Produzir quantidades do produto 1 e 3 para satisfazer a procura prevista;

6. Não exceder a capacidade de armazenamento disponível.

Determine o plano de produção da AEROL de modo a utilizar da melhor forma o excesso de capacidade disponível e satisfazer as metas pré-estabelecidas.

25. Um Instituto Politécnico está trabalhando na admissão de estudantes para o próximo ano.

Pretende determinar o número de estudantes pertencentes ao distrito ou não, a admitir em cada um dos seus três cursos: Computação, Gestão e Mecânica.

Cada um dos três cursos tem possibilidade de admitir 1500, 400 e 200 novos estudantes, respectivamente, e o Instituto tem um objectivo de admitir 2000 alunos.

Questões legais obrigam a que 75% dos novos alunos pertençam ao distrito e 25% sejam de fora. Além disso, o Instituto espera que 40% dos alunos sejam mulheres.

1300 alunos podem ficar alojados na residência de estudantes. A tabela seguinte indica as percentagens de alunos que no passado usaram a residência de estudantes.

	Homens	Mulheres
Do distrito	0.50	0.60
Fora do distrito	0.80	0.95

Os responsáveis pelas admissões estimaram um número de candidatos de modo a satisfazerem os requisitos mínimos de alunos em cada curso.

Alunos	Computação	Gestão	Mecânica
Homens – distrito	800	400	200
Mulheres – distrito	400	100	10
Homens – Fora do distrito	300	100	50
Mulheres – Fora do distrito	150	50	5

O responsável pelo Instituto ordenou as metas que devem ser tidas em linha de conta aquando da admissão:

1. Admitir exactamente 2000 novos alunos;

2. Admitir exactamente o número de alunos fixado para cada curso (com preferência para o curso de Gestão, a seguir para o de Mecânica e por último para o de Computação);

3. Satisfazer o mais possível a admissão de 75% de candidatos do Distrito;

4. Minimizar o objectivo de ter mais de 25% de admissões de fora do distrito;

5. Evitar a sub-utilização da residência de estudantes;

6. Evitar que menos de 40% dos novos alunos sejam mulheres;

7. Restringir a 50 o número de alunos, na residência de estudantes além da capacidade normal.

Formule o problema de modo a que as metas e as restrições da instituição de ensino sejam satisfeitas.

26. Considere o seguinte modelo simplificado de gestão de uma pequena floresta.

No próximo ano fiscal, 20000 hectares de terra, estão para serem distribuídos de forma que, sejam satisfeitas as metas definidas pelo departamento da Agricultura. Estas metas reflectem os quatro usos em que esta floresta costuma ser usada: diversão, caça, *habitats* para o lobo e corte de madeira.

Cada hectare de floresta pode acomodar 1000 visitantes por dia em diversão, 100 visitantes para caçar, 2 lobos e 12000 metros cúbicos de madeira. Os custos de operação associados a cada tipo de terra difere devido à natureza da supervisão, tipo de pessoal, etc. Os custos anuais de operação são estimados em 15 euros para diversão, 20 para caça, 5 para os lobos e 4 para o corte de madeira.

Os custos de operação para estas actividades, são suportados pela receita proveniente do *leasing* da terra destinada ao corte de madeira. Cada hectare, destinado ao corte de madeira é arrendado por 240 euros por ano.

O Departamento da Agricultura definiu as seguintes metas, classificadas por ordem da sua importância:

1. Minimizar o excesso de corte de 6000000 metros cúbicos de madeira (devido a pressões das associações ambientais);

2. Minimizar a sub-utilização de 10000 visitantes por dia que se destinam à caça (desporto muito típico desta região);

3. Exactamente conseguir a meta de ter 2000 lobos (o responsável pela Floresta tem um lobo domesticado);

4. Minimizar o excesso a 5 milhões de visitantes por dia em passeio (devido a falta de condições).

27. Uma empresa de Electrónica produz dois tipos de gravadores: Cassete e *Compact*. A produção destes dois tipos é feita em dois centros. Cada modelo Cassete precisa de 4 horas no centro 1 e de 2 horas no centro 2. Cada modelo *Compact* precisa de 2 horas no centro 1 e de 6 horas no centro 2.

Adicionalmente, cada produto precisa de algum tempo no armazém para ser devidamente embalado. Cada modelo Cassete custa 15 euros a ser embalado e cada modelo *Compact* custa 9 euros.

A capacidade normal de armazenagem para o centro 1 é de 240 horas e de 300 horas para o centro 2. A média mensal de custos do armazém é de 1200 euros.

De acordo com o departamento de *marketing*, as vendas estimadas para o modelo Cassete são de 55 unidades e para o modelo *Compact* são de 65 unidades, em cada mês.

A empresa estabeleceu as seguintes metas de acordo coma sua importância:

1. Conseguir vender 55 unidades dos modelos cassete no mês;
2. Não mais de 9000 euros devem ser gastos em custos de armazenagem;
3. Evitar a subtilização das horas normais de operação em ambos os centros (não devem ser atribuídas ponderações diferentes);
4. Limitar as horas extraordinárias do centro 1 a 40 horas;
5. Conseguir o objectivo de vender 65 unidades do modelo *Compact*;
6. Limitar o uso de horas extraordinárias nos dois centros (não devem ser atribuídas ponderações diferentes).

Resolva o problema apresentado.

28. Uma empresa tem à sua disposição três recursos diferentes: matérias-primas, trabalho e equipamento. A empresa usa estes recursos para produzir dois bens diferentes A e B.

A tabela seguinte apresenta as necessidades de cada recurso para produzir uma unidade de cada bem.

Bem	Matérias Kgs/unidade	Trabalho Horas/unidade	Equipamento Horas/unidade	Lucro Unidade
A	5	3	5	15
B	4	6	4	18

A empresa estabeleceu as seguintes metas classificadas de acordo com a sua prioridade:

1. Produzir pelo menos 5 unidades do produto A e 10 unidades do produto B;
2. Tentar não usar mais de 150 Kgs de matérias, 120 horas de trabalho e 108 horas de equipamento;
3. Realizar um lucro de 500 euros.

Formule o modelo de programação por metas que lhe permite resolver o problema desta empresa.

29. Uma empresa de engenharia genética, não tem tido sucesso no marketing de um dos seus produtos e pretende abrir uma nova loja. Para isso tem de contratar pessoal administrativo e técnico.

A informação julgada relevante é apresentada na tabela seguinte:

Classificação	Custo médio (Recrutamento/Posição)	
	Administrativo	Técnico
Homem não Minoritário	2000	1700
Mulher não Minoritária	1300	2000
Homem Minoritário	1600	2400
Mulher Minoritária	1900	2800

A empresa definiu os seguintes objectivos:

1. Pelo menos 45% das novas contratações devem ser mulheres;
2. As minorias devem representar 35% das novas contratações;
3. Pelo menos 3 mulheres minoritárias devem ser contratadas para as posições técnicas;
4. Pelo menos 2 homens minoritários devem ser seleccionados para posições técnicas;
5. O orçamento disponível, para contratações, de €100000 deve minimizado;
6. O número total de contratações administrativas deve ser de 40 e o número total de contratações técnicas deve ser de 17. Contudo, considera 3 vezes pior não recrutar os 17 técnicos do que contratar mais de 17 técnicos.

30. A Carla tem uma escolha de cinco produtos alimentares para incluir na sua dieta para a próxima semana: queijo, fruta, iogurte, pão, e chocolate. As calorias e proteínas associados com cada um destes produtos e o seu custo unitário são fornecidos na tabela seguinte:

Produto	Calorias por Unidade	Proteínas (mg) por unidade	Custo por Unidade (€)
Queijo	550	0.20	2.00
Fruta	400	0.32	0.10
Iogurte	380	0.18	1.20
Pão	320	0.08	0.10
Chocolate	750	0.11	0.85

A Carla tem um orçamento de €25, e não pode exceder na sua alimentação um máximo de 10000 calorias para perder peso. Além disso, deve consumir no mínimo 9.5 mg de proteínas para ter um crescimento harmonioso. A Carla prefere o chocolate, seguida do queijo, fruta, pão e iogurte, respectivamente.

Ajude a Carla a maximizar a sua satisfação sujeita às restrições referidas.

31. A empresa CECI desenvolveu dois novos produtos que podem ser produzidos fazendo uso do excesso da sua capacidade produtiva nas suas duas fábricas. A principal razão para o desenvolvimento destes dois novos produtos é para conseguir utilizar em pleno o seu excesso da sua capacidade produtiva numa base lucrativa.

Muito embora a CECI, por norma, utilize toda a sua capacidade produtiva acontece que, ocasionalmente, sobra capacidade produtiva causando problemas com a força de trabalho.

A CECI não precisa de toda a sua força de trabalho em períodos de uma menor procura mas o despedimento fere a imagem da empresa pelo que deve se evitado o mais possível.

A gestão também pretende balancear a utilização do excesso de capacidade entre as duas fábricas e distribuir a sua utilização de forma equitativa.

Para o horizonte temporal em consideração, as fábricas têm o seguinte excesso de capacidade (em termos de unidades de novos produtos) e disponibilidades de armazenagem destinadas aos novos produtos.

Fábrica	Excesso de Capacidade Produção (unidades)	Capacidade de Armazenamento (m^3)
1	800	48000
2	700	35000

O produto 1 e 2 precisam de 35 e 30 m^3, de espaço de armazenagem, por unidade, respectivamente. As contribuições unitárias do produto 1 e 2 são de €250 e €200, respectivamente. As previsões de vendas são de 1500 unidades e 1800 unidades do produto 1 e 2, respectivamente, durante o especificado horizonte temporal.

A gestão expressou os seguintes objectivos de forma decrescente da sua importância:

P_1: Ter um lucro de pelo menos €180000;

P_2: Usar o máximo possível do excesso de produção. Devido aos menores custos de trabalho a gestão pensa que é duas vezes mais importante usar a capacidade de produção da fábrica 1 do que a da fábrica 2;

P_3: Conseguir um balanceamento no uso do excesso de capacidade entre as fábricas. Causado pela solicitação dos trabalhadores da fábrica 1 a gestão pensa que se um não balanceamento ocorrer é duas vezes mais importante que seja a fábrica 1 a ter menos trabalho do que mais trabalho relativamente à fábrica 2;

P_4: Alcançar as previsões de vendas para o produto 1, porque tem uma maior margem de contribuição;

P_5: Produzir uma quantidade suficiente do produto 2 para satisfazer as vendas esperadas;

P_6: Evitar exceder a capacidade de armazenamento disponível.

32. Uma Câmara Municipal depara-se com uma árdua tarefa pois precisa de desenvolver um plano de recolha dos alunos para os deslocar para as respectivas escolas. A seguinte tabela contêm os custos e a quilometragem de cada zona para dada escola bem como o número de estudantes de cada raça e a capacidade das escolas.

		Escola 1		Escola 2		Escola 3		
		Transporte		Transporte		Transporte		Númro de
Zona	Raça	Custo (€)	Kms	Custo (€)	Kms	Custo (€)	Kms	Alunos
1	Preto	56	5	96	9	136	13	450
	Branco	56	5	96	9	136	13	0
2	Preto	66	6	116	11	156	15	250
	Branco	66	6	116	11	156	15	120
3	Preto	126	12	46	4	76	7	20
	Branco	126	12	46	4	76	7	600
4	Preto	96	9	76	7	56	5	0
	Branco	96	9	76	7	56	5	410
	Capacidade da Escola	700		500		650		

A quilometragem representa os quilómetros que os alunos têm de percorrer desde as paragens das zonas onde vivem até cada uma das escolas. Os custos são definidos num pressuposto de que para o primeiro quilómetro existe um custo fixo de €16 por aluno/ano e um custo adicional anual de €10 por estudante por cada quilómetro percorrido para além do quilómetro inicial.

A Câmara estabeleceu as seguintes metas listadas de acordo com a sua importância.

P_1: Conseguir um balanço racial em cada escola (por exemplo, se 50% dos estudantes são pretos então 50% dos estudantes em cada uma da escolas devem ser pretos);

P_2: Evitar um sub-utilização ou sobre-utilização de qualquer escola;

P_3: Minimizar o custo total de transporte do programa de transporte dos alunos;

P_4: Limitar a distância (média) de viagem dos alunos a 8 quilómetros.

As restrições do sistema exigem ainda que cada aluno seja atribuído a uma escola.

Formule este problema usando a PO.

33. Uma quinta agrícola de tamanho médio, está a planear as suas culturas para o próximo ano de modo a maximizar os lucros líquidos. O agricultor está a considerar em cultivar os seguintes produtos: cenouras, aipos, pepinos e pimentos.

A sua decisão é restringida por três restrições:

- A disponibilidade de terra – 300 hectares;
- A disponibilidade de mão-de-obra – 10000 horas;
- Exigência do mercado (rotativa) de que a terra dedicada à cultura dos aipos e dos pepinos seja inferior à terra dedicada à cultura das cenouras e dos pimentos;

As margens de contribuição líquidas para cada um destes produtos, nos últimos seis anos foram as seguintes:

Ano	Lucro líquido por Hectare			
	Cenouras	Aipos	Pepinos	Pimentos
1	295	-135	450	589
2	180	578	190	645
3	120	657	378	384
4	260	532	251	945
5	440	185	324	34
6	265	870	166	678

Formule e resolve este problema assumindo que o agricultor tem os seguintes objectivos:

P_1: Maximizar as margens líquidas;

P_2: Utilizar toda a terra disponível.

34. A empresa TETI usa três recursos diferentes no seu processo produtivo, para produzir dois produtos A e B, que têm margens de contribuição de €40 e €35, respectivamente.

A tabela seguinte apresenta as necessidades em material, trabalho e equipamento necessário para produzir uma unidade do produto A e do produto B.

	Produto A	Produto B
Material (partes por unidade)	14	7
Trabalho (horas por unidade)	6	7
Equipamento (horas por undiade)	11	6

O gestor da TETI priorizou as seguintes metas:

P_1: Produzir pelo menos 7 unidades do produto A e 10 unidades do produto B;

P_2: Evitar usar mais de 180 partes do material, 250 horas/trabalhador e 220 horas de equipamento;

P_3: Conseguir um lucro de €1200.

Ajude o gestor a planear a produção da empresa TETI.

35. Um editor de uma empresa de produção literária, precisa, com urgência, de editar um novo livro. O manuscrito, com 1500 páginas, deve ser editado dentro de 10 dias (8 horas por dia) e o custo total esperado desta produção é de €2000.

A política número um da empresa é de que um livro deste tipo não pode conter mais do que 15 erros. O editor pode atribuir um dado número de páginas a cada um dos quatro editores *freelancer*: Filipe, José, António e Maria. O seu desempenho bem como os custos relevantes são apresentados na tabela seguinte:

	Filipe	José	António	Maria
Velocidade (horas por página)	0.30	0.25	0.18	0.12
Precisão (erros por página)	0.04	0.05	0.008	0.01
Taxa Horária (€ por página)	1.25	1.20	1.32	1.35

Ajude o editor no planeamento da publicação do livro.