

EDUCAÇÃO e --- TECNOLOGIA



Revista do Instituto Politécnico da Guarda

"EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA"

Revista do Instituto Politécnico da Guarda

DIRECTOR: João Bento Raimundo

REDACÇÃO: Rua Comandante Salvador do Nascimento
Telef. 21634 6300 GUARDA

PROPRIEDADE: Instituto Politécnico da Guarda

EXECUÇÃO GRÁFICA: Secção de Reprografia do IPG

Depósito Legal N.º 17.891/87

Reprodução total ou parcial proibida

"É muito melhor saber um pouco de tudo do que saber tudo de uma só coisa; esta universalidade é a mais bela"

B. Pascal

Continuamos o nosso esforço de, através da Educação e Tecnologia, dar notícia do que mais se vai experimentando, descobrindo, sabendo, enfim, no Instituto Politécnico da Guarda.

Conscientes da inexistência de um saber acabado, do fluir e refluir das mais variadas teses, antíteses e sínteses, o espaço aberto que sempre pretendemos fosse, esta revista granjeou já uma implantação sólida.

Constitui, diríamos, uma amostra do que é o próprio IPG, em termos do seu alargamento e da sua aceitação.

Diremos que o todo que é o Instituto, (que não cremos seja a simples soma das partes, mas a interpretação de todas elas), continua em crescimento e em afirmação.

Os novos cursos lançados no presente ano lectivo - Engenharia de Construção Civil e Engenharia de Manutenção Industrial - vieram alargar o âmbito do intercâmbio científico, tecnológico e pedagógico-didático.

Contribuir para o desenvolvimento sócio-cultural e económico desta região tão carenciada é, também, e muito especialmente formar os seus filhos, abrindo todo um leque de opções que lhes venha a permitir uma inserção na vida activa em conformidade com potencialidades pessoais e do meio ainda não exploradas.

Efectivamente no IPG não se faz tudo, nem - muito menos - de tudo se sabe tudo.

Continuaremos a tentar fazer o melhor, que de muito se saiba muito e, desse tudo, se testemunhe o máximo.

João Bento Raimundo

Presidente da C. I. do
Instituto Politécnico da Guarda

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Fernando Pires Valente - Professor da ESTG

1. Introdução

O método dos elementos finitos é essencialmente um método genérico para a determinação de soluções de problemas de valor na fronteira. Consiste em dividir o domínio da solução num número finito de subdomínios, os elementos finitos, e utilizar conceitos variacionais para determinar uma solução aproximada sobre o conjunto dos elementos finitos.

No presente trabalho pretende-se dar uma ideia genérica dos fundamentos de método. Com esse objectivo analisaremos um exemplo o mais simples possível: um problema de valor na fronteira unidimensional caracterizado por uma equação diferencial linear de 2ª ordem e um par de condições fronteira.

Embora o problema anterior não tenha grande interesse prático a sua estrutura matemática e a formulação que se irá desenvolver no cálculo da sua solução aproximada são basicamente as mesmas que surgem em problemas mais complexos e com aplicações práticas.

2. Formulação do problema

Vamos estudar o problema da determinação da função $y=y(x)$, $0 \leq x \leq 1$ que satisfaz à seguinte equação diferencial a às seguintes condições fronteira:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -y'' + y = x \\ y(0) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ y(1) = 0 \end{array} \right. \quad \left(y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \right)$$

Os dados do problema consistem no domínio da solução ($0 \leq x \leq 1$), na parte não homogénea da equação diferencial (a

função $f(x) = x$ do 2º membro da equação), nos coeficientes das várias derivadas de y (no caso presente as constantes -1 e $+1$) e nos valores na fronteira do domínio (o valor 0 em $x=0$ e $x=1$).

Refira-se desde já que com os dados do problema anterior existe uma única função y que satisfaz à equação diferencial em todos os pontos do seu domínio, bem assim como às condições fronteira. É até relativamente fácil calcular a solução exacta da equação que é $y(x) = x - (\sinh x / \sinh 1)$.

Todavia, na generalidade dos casos tal não se verifica pois ou não existe solução para o problema proposto, ou se esta existe não pode ser determinada de forma analítica devido à complexidade do domínio, coeficientes ou condições fronteira.

Como exemplo de uma equação que não admite solução, considera-se o caso de na equação dada a função $f(x)$ do 2º membro ser $f(x) = \delta(x-1/2)$, isto é:

$$-y'' + y = \delta(x - 1/2) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad y(0) = 0 = y(1)$$

onde $\delta(x-1/2)$ é a função δ de Dirac ("impulso unitário" concentrado em $x=1/2$).

Na verdade $\delta(x-1/2)$ nem sequer é uma verdadeira função, mas antes um modo simbólico de escrever a operação definida por:

$$\delta(x-1/2) \phi(x) = \phi(1/2) \quad \text{ou}$$

$$\int_0^1 \delta(x-1/2) \phi(x) dx = \phi(1/2)$$

para qualquer função infinitamente diferenciável satisfazendo às condições fronteira $\phi(0) = 0 = \phi(1)$.

Uma função y que satisfaça a (1) deverá ter uma descontinuidade na sua primeira derivada y' em $x=1/2$ e a sua segunda derivada y'' não existirá nesse ponto.

Sendo assim põe-se a questão de como pode uma função y satisfazer à equação (1) no intervalo $0 < x < 1$ quando a sua segunda derivada não pode existir em $x=1/2$ devido aos dados do problema.

A dificuldade está em que o requisito de que a solução y de (1) satisfaça à equação diferencial em todos os pontos $0 < x < 1$ é demasiado forte. Para a superar é necessário reformular o problema de valor na fronteira de modo a considerar uma condição mais fraca para a solução y e as suas derivadas.

Uma tal reformulação diz-se uma formulação *fraca* ou *variacional* do problema e tem por objectivo a sua adaptação a situações como a descrita anteriormente.

Note-se, no entanto, que sempre que uma solução analítica ("normal") de um dado problema existir, ela será também solução da respectiva formulação fraca.

Assim nada se perde com a reformulação e obtém-se a vantagem de poder considerar problemas com soluções não regulares como o anteriormente descrito.

E mais importante ainda, os problemas de fronteira de tipo fraco ou variacional têm precisamente a mesma formulação

3. Formulação variacional

Uma formulação fraca do problema em estudo pode ser estabelecida da seguinte maneira: determinar uma função y tal que a equação diferencial juntamente com as condições fronteira seja satisfeita num sentido de "médias ponderadas". Ou seja que se verifique:

$$\int_0^1 (-y'' + y) u \, dx = \int_0^1 x u \, dx$$

para todas as funções u pertencentes a uma dada classe de funções.

Na expressão anterior a função de ponderação ou de teste u , será qualquer função de x suficientemente regular de modo que os integrais façam sentido.

Com o objectivo de precisar melhor a formulação fraca, introduz-se a ideia do conjunto de todas as funções suficientemente regulares para poderem ser consideradas funções de teste. Designar-se-á o conjunto dessas funções que assumem o valor 0 em $x=0$ e $x=1$ por H e pela notação " $u \in H$ " deverá entender-se " u pertence ao conjunto H ".

Nestas condições a formulação variacional do problema em estudo assumirá a forma da determinação de uma função y tal que:

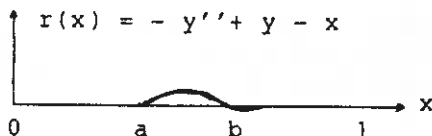
$$(2) \quad \int_0^1 (-y'' + y - x) u \, dx = 0 \quad \text{para } \forall u \in H$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

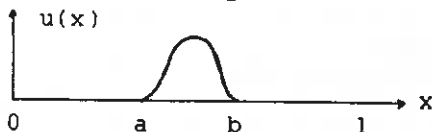
Refira-se que das considerações anteriores se pode deduzir que não poderá existir nenhum subintervalo de $0 < x < 1$ por mais pequeno que seja no qual a equação diferencial dada não seja satisfeita num sentido de "média ponderada".

Para verificar tal basta considerar o erro residual da equação diferencial definido por $r(x) = -y'' + y - x$.

Suponha-se então que $r(x)$ é diferente de 0 numa pequena região como a representada na figura seguinte:



Correspondendo ao $r(x)$ referido pode escolher-se $u(x)$ como se exemplifica na figura seguinte:



Ora nestas condições a função integranda de (2) é positiva no intervalo $a < x < b$ e nula nos restantes pontos x , logo o integral não pode ser nulo e a função y não pode ser solução do problema dado.

Com uma escolha conveniente de u pode-se testar a equação diferencial em todas os pontos da região em estudo, de onde se pode concluir que as condições (2) implicam que ela seja verificada em média em todas as subregiões.

Pode-se portanto concluir que a formulação fraca é tão válida e significativa como a formulação original do problema e na verdade verifica-se que a solução de (1) satisfaz a (2) e é também a única solução de (2).

Sendo assim é fundamental definir o conjunto H das funções de teste admissíveis para a formulação fraca do problema.

Convirá desde já referir que as funções de teste da formulação variacional (2) podem não pertencer à mesma classe de funções \tilde{H} a que pertencem as soluções da equação.

Assim, e por exemplo, y não pode ser escolhida da classe de funções \tilde{H} que têm a propriedade de a respectiva segunda derivada quando multiplicada por uma função de teste u dar origem a uma função $y''u$ integrável no intervalo $0 < x < 1$, enquanto que na formulação (2) não aparecem derivadas das funções de teste. Tal conduz a que H e \tilde{H} não sejam idênticas, originando uma falta de simetria na formulação variacional que é desejável evitar por razões computacionais e outras.

Vai-se portanto considerar uma outra formulação variacional *simétrica*, que se obtém constatando que se y e u forem funções suficientemente regulares a fórmula de integração por partes conduz a:

$$\int_0^1 -y'' u \, dx = \int_0^1 y' u' \, dx - [y'u]_0^1$$

Continuando a exigir que as funções de teste se anulem nos pontos extremos do intervalo:

$$\int_0^1 -y'' u \, dx = \int_0^1 y' u' \, dx$$

para todas as funções de teste admissíveis u .

A formulação (2) pode então ser substituída pelo problema variacional alternativo seguinte: determinar $y \in H_0^1$ tal que

$$(3) \quad \int_0^1 (y' u' + yu - xu) \, dx = 0 \quad \text{para qualquer } u \in H_0^1$$

em que H_0^1 é uma nova classe de funções cujas propriedades se descrevem de seguida.

Note-se que agora passa a existir uma certa simetria na formulação pois as derivadas das funções y e u que aparecem são da mesma ordem e pode-se portanto tomar $H = \tilde{H} = H_0^1$.

(1) satisfaz a formulação (3) pelo que nao se perde qualquer informação, embora se tenham enfraquecido os requisistos da solução ao passar de (1) para (2) e para (3) visto que agora apenas se consideram 1^{as} derivadas. Com este enfraquecimento consegue-se entretanto alargar a classe de "dados" para o qual a formulação do problema faz sentido.

Pode-se agora caracterizar a classe H_0^1 de funções (chamada de funções admissíveis). Ela é constituída somente por aquelas funções que satisfazem às condições fronteira e são suficientemente regulares para que o integral em (3) faça sentido.

O termo mais irregular na função integrando de (3) é $y'u'$ pois se y ou u forem funções não regulares as suas derivadas serão ainda menos regulares. Como u pode ser qualquer função do conjunto de funções admissíveis deve ser considerada a possibilidade de que $y=u$. Assim será necessário que $(u')^2$ seja suficientemente regular para que o seu integral se possa calcular.

As funções com esta propriedade dizem-se como primeira derivada de quadrado integrável e pode-se portanto definir o conjunto de funções admissíveis H_0^1 como sendo o conjunto de todas as funções que se anulam nos pontos fronteira e cujas primeiras derivadas têm quadrado integrável.

Assim uma dada função $u \in H_0^1$ sse :

$$\int_0^1 (u')^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad u(0) = 0 = u(1)$$

4. Aproximação de Galerkin

Atendendo às observações já feitas pode-se considerar o problema dado na seguinte forma variacional: determinar $y \in H_0^1$ tal que:

$$(4) \quad \int_0^1 (y'u' + yu) dx = \int_0^1 x u dx \quad \text{para qualquer função } u \in H_0^1$$

Põe-se agora a questão de determinar soluções aproximadas do problema anterior para o que desempenham um papel fundamental as propriedades das funções admissíveis pertencentes à classe H_0^1 . Para além das já referidas existem outras duas fundamentais para o tipo de aproximação que se pretende.

Em primeiro lugar H_0^1 é um espaço linear de funções (isto é se $u_1, u_2 \in H_0^1$, e μ e β são constantes reais arbitrárias $\mu u_1 + \beta u_2 \in H_0^1$) e em segundo tem dimensão infinita (o que quer dizer que para definir univocamente uma função de teste $u \in H_0^1$ é necessária uma infinidade de parâmetros).

Suponha-se então dado um conjunto infinito de funções $\{\theta_1(x), \theta_2(x), \dots\}$ de H_0^1 com a propriedade de que qualquer

função de teste $u \in H_0^1$ poder ser representada como uma combinação linear única das funções $\phi_i(x)$, isto é:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \phi_i(x)$$

onde os β_i são constantes e a série converge no espaço H_0^1 .

Um tal conjunto de funções $\{\phi_i\}$, com as referidas propriedades diz-se constituir uma base de H_0^1 e as funções ϕ_i denominam-se funções de base.

É evidente que se se considerarem apenas n (número finito) funções na série anterior, obter-se-á apenas uma aproximação u_n de u :

$$(5) \quad u_n(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x)$$

As n funções de base $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ definirão um subespaço n -dimensional $H_0^{(n)}$ de H_0^1 com dimensão finita e igual a n .

Feitas estas considerações pode-se afirmar que o método de Galerkin para a determinação da solução aproximada do problema variacional em estudo consiste em procurar uma solução de (4) num subespaço finito $H_0^{(n)}$ do espaço H_0^1 das funções admissíveis.

Assim em vez de se procurar resolver o problema de dimensão infinita (4) vai procurar-se uma solução aproximada $y_n \in H_0^{(n)}$ da forma:

$$(6) \quad y_n(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i \phi_i(x)$$

que satisfaça (4), substituindo H_0^1 por $H_0^{(n)}$.

A formulação do problema variacional aproximado em causa poderá ser: determinar $y_n \in H_0^{(n)}$ tal que:

$$\int_0^1 (y_n' u_n' + y_n u_n) dx = \int_0^1 x u_n dx \quad \text{para qualquer } u_n \in H_0^{(n)}$$

Sendo conhecidas ϕ_i, y_n ficará completamente determinada uma vez calculados os n coeficientes μ_i que figuram na expressão (6) e que se designam por graus de liberdade da aproximação.

Passando agora ao cálculo dos valores de μ_i que vão caracterizar a solução y_n podem-se substituir (5) e (6) na equação integral anterior o que conduz a:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x) \right] \cdot \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^n \mu_j \phi_j(x) \right] + \left[\sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^n \mu_j \phi_j(x) \right] - x \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x) \right\} dx = 0$$

para todos os $\beta_i, i=1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \left(\sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 [\varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx \right] \mu_j - \int_0^1 x \varphi_i(x) dx \right) = 0$$

para todos os β_i , $i = 1, 2, \dots, n$

em que $\varphi_i'(x) = \frac{d\varphi_i(x)}{dx}$

De uma forma mais compacta:

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} \mu_j - F_i \right) = 0 \quad \text{para todos os } \beta_i$$

com $K_{ij} = \int_0^1 [\varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx$ e $F_i = \int_0^1 x \varphi_i(x) dx$ e $i, j = 1, 2, \dots, n$

Sendo as funções φ_i conhecidas, as matrizes $[K_{ij}]$ ($n \times n$) e $[F_i]$ ($n \times 1$) podem ser directamente calculadas das expressões anteriores.

Por outro lado como os β_i são arbitrários a equação (7) representa um conjunto de n equações a serem satisfeitas pelos μ_j , o que se pode verificar se se fizer em primeiro lugar $\beta_1 = 1$ e $\beta_i = 0$ para $i \neq 1$. Tal substituição conduz a

$$\sum_{j=1}^n K_{1j} \mu_j = F_1.$$

Repetindo o processo agora para $\beta_2 = 1$ e $\beta_i = 0$, com $i \neq 2$ obtém-se

$$\sum_{j=1}^n K_{2j} \mu_j = F_2$$

e assim sucessivamente.

Finalmente obter-se-á um sistema de n equações lineares a n incógnitas (os coeficientes μ_j)

$$(8) \quad \sum_{j=1}^n K_{ij} \mu_j = F_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Como as funções φ_i foram escolhidas de modo a serem linearmente independentes, as equações (8) serão independentes e a matriz $[K]$ será invertível.

Nestas condições os coeficientes μ_j serão univocamente determinados e dados por:

$$\mu_j = \sum_{i=1}^n (K^{-1})_{ji} F_i$$

onde $(K^{-1})_{ji}$ representa os elementos da matriz inversa de $[K]$.

A solução aproximada y_n pode agora ser calculada substituindo os μ_j na equação (6).

É importante notar que a qualidade da aproximação é completamente determinada pela escolha das funções ϕ_i e que uma vez estas escolhidas a determinação dos coeficientes μ_j se reduz a um cálculo computacional.

5. Funções de base para elementos finitos

Enquanto o método de Galerkin fornece uma estratégia elegante para a determinação de soluções aproximadas de problemas de valor na fronteira, tem como desvantagem o facto de não fornecer nenhum método sistemático de construção de funções de base ϕ_i para a aproximação das funções de teste u_n , sabendo-se à partida que a qualidade da solução aproximada a determinar vai depender fortemente das propriedades das funções de base escolhidas.

Além disso uma escolha inconveniente de ϕ_i pode originar uma matriz $[K]$ mal condicionada de modo que se torne difícil resolver o sistema (8) com a precisão desejada.

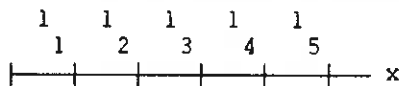
Por estas razões e também pela dificuldade de tratar geometrias irregulares em dimensões mais elevadas (2 ou 3) o método de Galerkin é de aplicação limitada sendo normal utilizar o *método dos elementos finitos*.

Este método fornece um técnica geral e sistemática para a construção das funções de base da aproximação de Galerkin de problemas de valor na fronteira.

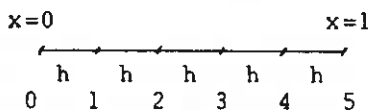
A ideia principal do método é a de que as funções ϕ_i podem ser definidas por troços em subregiões de seu domínio, denominados elementos finitos e que nessas subregiões podem assumir a forma de funções elementares tais como polinómios de grau pouco elevado.

Analisando o problema em estudo, para a construção do conjunto de funções de base divide-se em primeiro lugar o domínio ($0 \leq x \leq 1$) num número finito de elementos (na figura seguinte 5 elementos denominados l_i , $i=1,2,3,4,5$)

Elementos:



Nós:



de cada elemento finito l_i designar-se-à h_i e como no caso figurado os elementos têm o mesmo comprimento pode-se dedigná-lo por h)

Em cada elemento identificam-se certos pontos designados por nós ou pontos nodais (ver figura anterior) que como veremos no seguimento desempenham um papel importante na formulação dos elementos finitos .

Ao conjunto de elementos e pontos nodais, que constituem o domínio do problema é habitual designar-se malha dos elementos finitos.

Por conveniência de exposição far-se-à agora uma ligeira alteração na notação utilizada. Assim até aqui designaram-se as funções aproximadas de solução da equação diferencial e de teste por y_n e u_n , respectivamente, onde n era um parâmetro que indicava o número de funções de base de $H_0^{(n)}$. Nos elementos finitos é usual utilizar o comprimento da malha h como parâmetro em vez de n , passando então as notações a ser y_h , u_h e H_0^h .

Uma vez definida a malha de elementos finitos para o problema em estudo pode-se construir o correspondente conjunto de funções de base obedecendo aos 3 pontos seguintes:

(i) As funções de base são geradas por funções elementares definidas elemento a elemento sobre a malha dos elementos finitos

(ii) As funções de base devem ser suficientemente regulares para pertencerem à classe H_0^1 de funções de teste.

(iii) As funções de base são escolhidas de modo tal que os parâmetros μ_i da solução aproximada y_h (ver equação (6)) são precisamente os valores de $y_h(x)$ nos pontos nodais.

Nestas condições um conjunto simples de funções de base será o definido do seguinte modo para $i=1,2,3$, e 4:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x-x_{i-1}) / h_i & \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1}-x) / h_{i+1} & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{para } x \leq x_{i-1} \text{ e } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

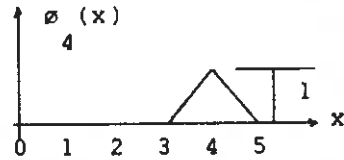
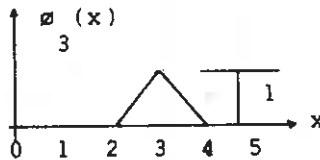
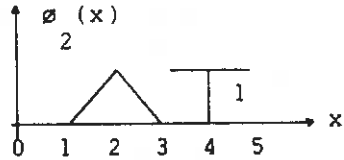
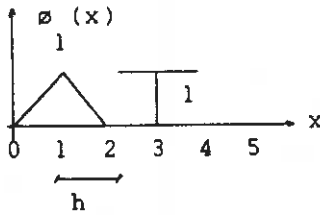
(0 para $x \leq x_{i-1}$ e $x \geq x_{i+1}$)

em que $h_i = x_i - x_{i-1}$ é o comprimento do elemento l_i . (x_i com $i=0,1,2,3,4,5$ designam-se coordenadas dos nós.)

As primeiras derivadas das funções de base terão por expressão:

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} 1/h_i & \text{para } x_{i-1} < x < x_i \\ -1/h_{i+1} & \text{para } x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{para } x < x_{i-1} \text{ e } x > x_{i+1} \end{cases}$$

Os gráficos das funções ϕ_i , $i=1,2,3,4$, serão:

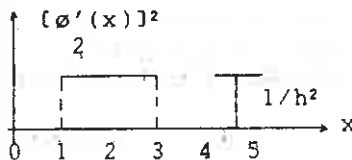
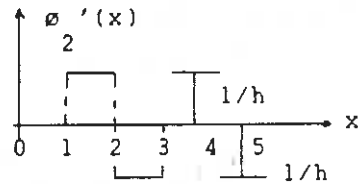
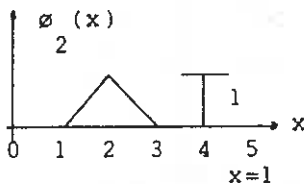


e note-se que por exemplo: $\phi_1(x)$

$$\begin{array}{c} \triangle \\ 0 \quad 1 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ 0 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \triangle \\ 1 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \end{array}$$

Facilmente se pode verificar que as 4 funções anteriores satisfazem os critérios (i), (ii) e (iii). Assim, por exemplo, note-se que sendo as funções consideradas contínuas no domínio do problema em estudo terão derivadas de quadrado integrável, pertencentes às funções de classe H_0^1 .

A figura seguinte clarifica este ponto:



Quanto ao critério (iii) os parâmetros μ_i definidores de y_h deverão ter o valor de y_h nos pontos nodais. Tal pode ser conseguido se cada uma das funções de base tiver a propriedade

especificamente, sendo x_j a coordenada x do nó j :

$$(9) \quad \phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

No caso em estudo $i=1,2,3,4$, e $j=0,1,2,3,4,5$ facilmente se verificando que as funções de base escolhidas satisfazem ao critério anterior.

Seja então $u_h \in H_0^h$, de acordo com (6) e com a nova notação adoptada:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x) \quad (n=4)$$

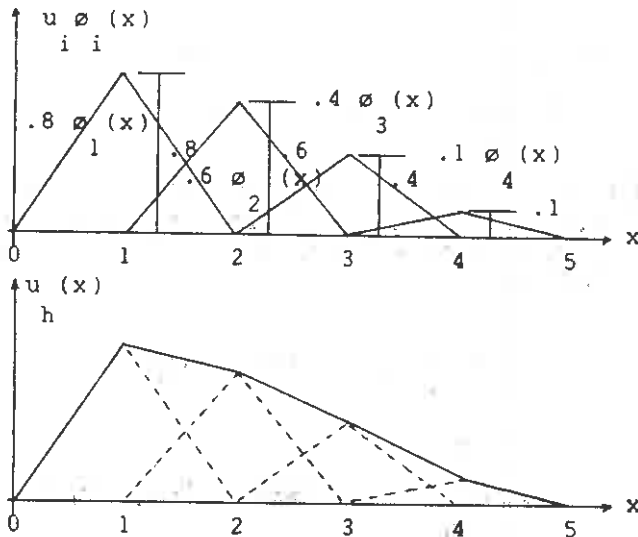
Se u_j for o valor da função u_h num ponto nodal arbitrário j ($u_j = u_h(x_j)$) e se verificar (9), tendo-se para o caso em estudo

$$u_j = \sum_{i=1}^4 \beta_i \phi_i(x_j) = \beta_j \quad j=1,2,3,4$$

conclui-se que a representação por elementos finitos de u_h toma a forma:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^4 u_i \phi_i(x) \quad u_i = u_h(x_i)$$

O gráfico seguinte esclarece como através da expressão anterior se obtém uma representação continua de u_h . (Admitem-se como valores de u_h nos nós 1,2,3 e 4 os seguintes 0.8, 0.6, 0.4, 0.1).



Pode-se aqui fazer uma observação final sugerida pela forma da função u_h anterior. Na medida em que a malha dos elementos finitos for mais refinado (menores h 's) assim a função y_h se aproximará mais da solução y do problema, embora em geral os seus valores não sejam exactamente os assumidos pela solução exacta (caso seja conhecida) nos mesmos pontos.

Embora as ideias anteriores se aproximem dos conceitos do cálculo diferencial no caso presente não se faz a passagem ao limite (os elementos apresentam sempre um comprimento finito h) e daí o nome de elementos finitos.

6. Cálculos com elementos finitos

Voltando à aproximação de Galerkin do problema variacional de valor na fronteira (4) e usando a técnica dos elementos finitos para construir as funções de base ϕ_i pode-se escrever:

$$(10) \quad \int_0^1 (y'_h u'_h + y_h u_h) dx = \int_0^1 x u_h dx \quad \text{para todas as}$$

funções $u_h \in H_0^h$

Isto é, pretende-se determinar $y_h \in H_0^h$ (H_0^h é um subespaço de H_0^1 definido pela escolha particular de ϕ_i) tal que verifique a equação anterior, na qual $y_h = \sum y_i \phi_i$ e os y_i são os valores de y_h nos pontos nodais da malha de elementos finitos.

Atendendo a (8) chega-se ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = F_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

onde as matrizes $[K]$ ($n \times n$) e $[F]$ ($n \times 1$) já foram definidas anteriormente.

Estas matrizes possuem algumas propriedades fundamentais que são:

(i) É possível gerá-los fazendo os cálculos somente para as matrizes $[K^e]$ ($n \times n$) e $[F^e]$ ($n \times 1$) referentes a um elemento típico l_e e procedendo de seguida à formação de $[K]$ e $[F]$ através das expressões seguintes:

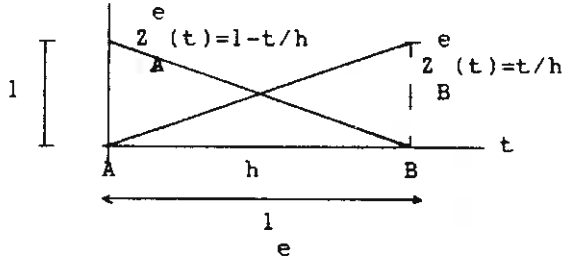
$$(11) \quad \begin{aligned} K_{ij} &= \sum_{e=1}^5 K^e_{ij} & \text{com} & \quad K^e_{ij} = \int_{l_e} (\phi'_i \phi'_j + \phi_i \phi_j) dx \\ F_i &= \sum_{e=1}^5 F^e_i & \text{com} & \quad F^e_i = \int_{l_e} x \phi_i dx \end{aligned}$$

maioria dos seus elementos são zeros) e se os nós forem numerados sequencialmente como no caso em estudo os elementos $\neq 0$ aparecem junto da diagonal principal da matriz, sendo os restantes todos nulos. (Diz-se então que se trata de uma matriz em banda).

(iii) A matriz $[K]$ é em geral simétrica (como no caso em estudo) embora tal nada tenha a ver com a escolha das funções de base mas sim com a forma do problema variacional a resolver.

Podem-se agora utilizar as propriedades referidas atrás para o cálculo da solução do caso em estudo.

Assim, de acordo com (i) basta realizar os cálculos essenciais para um elemento finito típico l_e , que se representa a seguir:



Para tal considerem-se os nós locais A e B e seja t um sistema de coordenadas local como o representado. Quando x passa de x_A para x_B , t passa de 0 a h e pode escrever-se $t = x - x_A$.

Recorde-se entretanto que as funções de base ϕ_i são constituídas juntando polinómios definidos localmente sobre cada elemento (a que se chama funções de forma do elemento).

Sejam então Z_A^e e Z_B^e as funções de forma definidas para o elemento l_e as quais são partes elementares de ϕ_A e ϕ_B , sendo dados em termos de coordenada local t por:

$$Z_A^e(t) = 1 - t/h \qquad Z_B^e(t) = t/h$$

Nestas condições:

$$Z_A^{e'}(t) = -1/h \qquad Z_B^{e'}(t) = 1/h$$

De acordo com (11) os elementos da matriz $[K]$ para o elemento genérico l_e serão:

$$\begin{aligned} K_{AA}^e &= \int_0^h \left\{ \left[Z_A^{e'}(t) \right]^2 + \left[Z_A^e(t) \right]^2 \right\} dt = \\ &= \int_0^h \left[1/h^2 + (1-t/h)^2 \right] dt = 1/h + h/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{AB}^e &= K_{BA}^e = \int_0^h [Z'_A(t) \cdot Z'_B(t) + Z'_A(t) \cdot Z'_B(t)] dt = \\
 &= \int_0^h [(-1/h) \cdot 1/h + (1-t/h) \cdot t/h] dt = -1/h + h/6 \\
 K_{BB}^e &= \int_0^h \{ [Z'_B(t)]^2 + [Z'_B(t)]^2 \} dt = 1/h + h/3
 \end{aligned}$$

Identicamente para a matriz [F]:

$$\begin{aligned}
 F_A^e &= \int_0^h (x_A + t) \cdot (1-t/h) dt = \frac{h}{6} \cdot (2x_A + x_B) \\
 F_B^e &= \int_0^h (x_A + t) \cdot (t/h) dt = \frac{h}{6} \cdot (x_A + 2x_B)
 \end{aligned}$$

em que x_A e x_B são os valores da função $f(x)=x$ nos nós A e B.

Assim:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} 1/h+h/3 & -1/h+h/6 \\ -1/h+h/6 & 1/h+h/3 \end{bmatrix} \quad e \quad [f^e] = h/6 \begin{bmatrix} 2x_A+x_B \\ x_A+2x_B \end{bmatrix}$$

sendo estas matrizes dos elementos as que são calculadas num programa de elementos finitos.

Quando o problema tem uma dimensão especificada (4 no caso em estudo) e estão definidas as coordenadas dos nós podem calcular-se os elementos das matrizes anteriores e armazená-los na linha i e coluna j apropriadas para os nós e elementos que representam.

Assim as matrizes [K] e [F] são obtidas a partir do somatório das equações (12) e como no caso presente $h=1/5$ obtêm-se os seguintes resultados:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} 5+1/15 & -5+1/30 \\ -5+1/30 & 5=1/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76/15 & -149/30 \\ -149/30 & 76/15 \end{bmatrix} \quad e=1,2,3,4,5$$

$$[f^1] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [f^2] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[f^3] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad [f^4] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\frac{30}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \frac{150}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Relação entre os pontos nodais e os elementos finitos (1^o) utilizados para o cálculo dos elementos da matriz [K] (de acordo com as considerações anteriores os elementos condicionam a valor de [K] em cada posição da matriz).

Elemento de [K] (linha, coluna)		Elementos finitos (1 ^o)
1,1	-----	1,2
1,2	-----	2
1,3	-----	x
1,4	-----	x
2,1	-----	2
2,2	-----	2,3
2,3	-----	3
2,4	-----	x
3,1	-----	x
3,2	-----	3
3,3	-----	3,4
3,4	-----	4
4,1	-----	x
4,2	-----	x
4,3	-----	4
4,4	-----	4,5

Relação entre os pontos nodais e os elementos da matriz [F] (ver considerações anteriores).

Elemento de [F] (linha, coluna)		Nós
1,1	-----	1
2,1	-----	1,2
3,1	-----	2,3
4,1	-----	3,4
5,1	-----	4

Ou seja:

Elemento 1₁

$$[K^1] = [K_{ij}^1] = 1/30$$

$$\begin{bmatrix} 152 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F^1] = [F_1^1] = 1/150$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento l_2

$$[K^2]=[K_{ij}^2]=1/30 \begin{bmatrix} 152 & -149 & 0 & 0 \\ -149 & 152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [F^2]=[F_1^2]=1/150 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento l_3

$$[K^3]=[K_{ij}^3]=1/30 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 152 & -149 & 0 \\ 0 & -149 & 152 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [F^3]=[F_1^3]=1/150 \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento l_4

$$[K^4]=[K_{ij}^4]=1/30 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 152 & -149 \\ 0 & 0 & -149 & 152 \end{bmatrix} \quad [F^4]=[F_1^4]=1/150 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Elemento l_5

$$[K^5]=[K_{ij}^5]=1/30 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 152 \end{bmatrix} \quad [F^5]=[F_1^5]=1/150 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}$$

E de acordo com (12):

$$[K]=[K_{ij}]=[K^1]+[K^2]+[K^3]+[K^4]+[K^5] = 1/30 \begin{bmatrix} 304 & -149 & 0 & 0 \\ -149 & 304 & -149 & 0 \\ 0 & -149 & 304 & 0 \\ 0 & 0 & -149 & 302 \end{bmatrix}$$

$$[F]=[F_1]=[F^1]+[F^2]+[F^3]+[F^4]+[F^5] = 1/150 \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \\ 24 \end{bmatrix}$$

o que conduz ao seguinte sistema de equações:

$$1/30 \begin{bmatrix} 304 & -149 & 0 & 0 \\ -149 & 304 & -149 & 0 \\ 0 & -149 & 304 & -149 \\ 0 & 0 & -149 & 304 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 1/25 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

em que y_1, y_2, y_3 e y_4 são os valores de y_k nos nós 1, 2, 3, e 4 respectivamente.

Resolvendo, obtém-se:

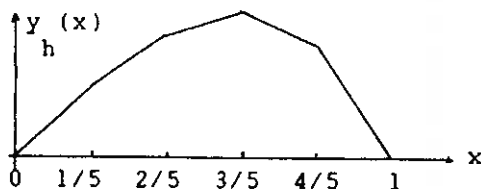
$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0288 \\ 0.0506 \\ 0.0584 \\ 0.0444 \end{bmatrix}$$

(1) sera:

$$y_h(x) = 0.0288\phi_1(x) + 0.0506\phi_2(x) + 0.0584\phi_3(x) + 0.0444\phi_4(x)$$

sendo ϕ_i as funções consideradas atrás.

A respectiva representação gráfica terá a forma que se apresenta na figura seguinte:



7. Conclusões

Fez-se uma descrição genérica da implementação do método dos elementos finitos concretizando-se com um exemplo didático que embora sem interesse prático tem a mesma estrutura matemática e a mesma formulação de cálculo que aquelas que surgem em problemas práticos com estruturas mais complexas, dando-se assim ao leitor uma ideia das suas possibilidades e do seu modo de funcionamento.

Bibliografia:

1. Finite Elements, An Introduction vol.1
Eric B. Becker, Graham F. Carey, I. Tinsley Oden
Prentice - Hall. Inc.
2. The Finite Element Method
Thomas J. R. Hughes
Prentice - Hall Inc.