EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA

Revista do Instituto Politécnico da Guarda

"EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA"
Revista do Instituto Politecnico da Guarda

DIRECTOR: João Bento Raimundo

REDACÇÃO: Rua Comandante Salvador do Nascimento
Telef. 21634 6300 GUARDA

PROPRIEDADE: Instituto Politécnico da Guarda

EXECUÇÃO GRÁFICA: Secção de Reprografia do IPG

Depósito Legal N.º 17.891/87

Nº 4 / Março / 89

"É muito melhor saber um pouco de tudo do que saber tudo de uma só coisa; esta universalidade é a mais bela"

B. Pascal

Continuamos o nosso esforço de, através da Educação e Tecnologia, dar notícia do que mais se vai experimentando, descobrindo, sabendo, enfim, no Instituto Politécnico da Guarda.

Conscientes da inexistência de um saber acabado, do fluir e refluir das mais variadas teses, antíteses e sínteses, o espaço aberto que sempre pretendemos fosse, esta revista granjeou já uma implantação sólida.

Constitui, diríamos, uma amostra do que é o próprio IPG, em termos do seu alargamento e da sua aceitação.

Diremos que o todo que é o Instituto, (que não cremos seja a simples soma das partes, mas a interpretação de todas elas), continua em crescimento e em afirmação.

Os novos cursos lançados no presente ano lectivo - Engenharia de Construção Civil e Engenharia de Manutenção Industrial - vieram alargar o âmbito do intercâmbio científico, tecnológico e pedagógico-didáctico.

Contribuir para o desenvolvimento sócio-cultural e económico desta região tão carenciada é, também, e muito especialmente formar os seus filhos, abrindo todo um leque de opções que lhes venha a permitir uma inserção na vida activa em conformidade com potencialidades pessoais e do meio ainda não exploradas.

Efectivamente no IPG não se faz tudo, nem - muito menos - de tudo se sabe tudo.

Continuaremos a tentar fazer o melhor, que de muito se saiba muito e, desse tudo, se testemunhe o máximo.

João Bento Raimundo

Presidente da C. I. do
Instituto Politécnico da Guarda

CONSIDERAÇÕES ACERCA DE UMA SUCESSÃO

Henrique Varandas Esteves, Professor Adjunto da E.S.T.G.

1. Introdução

No 1º teste de Matemática I dos cursos leccionados na E.S.T.G., neste ano lectivo, foi proposto, entre outros, o seguinte problema que transcrevemos e depois resolveremos.

- Considere a sucessão $\{U_u\}$ definida da seguinte maneira:

$$U_1 = 1 \, , \, U_{n+1} = \frac{2\,U_u + 2}{U_n + 2}, \; n \in \mathbb{N}$$

a) Mostre que $U_n > 0, \forall_n$

b) Estude quanto à monotonia a sucessão.

c) Justifique que U_n é convergente e calcule o limite de U_n.

Resolução:

a) Utilizamos o método de indução para provar que $U_u > 0$, $\forall_n$. Com efeito:

i) $U_1 = 1 > 0$ (indutividade)

ii) $U_n > 0 \Rightarrow 2\,U_n + 2 > 0 \wedge U_n + 2 > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$ (hereditariedade)

b) $$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{(U_n + 2)\,(U_{n-1} + 2)}(U_n - U_{n-1})$$

Atendendo a que a expressão $\dfrac{2}{(U_n + 2)\,(U_{n-1} + 2)} > 0, \forall_{n \geq 2}$

Concluímos que $U_{n+1} - U_n$ tem o sinal de $U_n - U_{n-1}$, para $n \geq 3$.

Mas $U_3 - U_2 = \frac{1}{15} > 0$, logo,

$U_4 - U_3 > 0, ..., U_{n+1} - U_n > 0, ...$

enfim, $U_{n+1} > U_n$, $\forall n > 2$.

Além disso, $U_2 - U_1 = \frac{1}{3} > 0$ e podemos então generalizar a condição anterior e escrever

$$U_{n+1} > U_n , \forall n \in \mathbb{N}$$

Concluindo que a sucessão é estritamente crescente.
c) Observemos que

$2U_n + 2 = 2 (U_n + 1) < 2 (U_n + 2) \Rightarrow U_{n+1} < 2$
Tendo em atenção a definição da sucessão e a conclusão de b) , resulta:

$$1 \leq U_n < 2$$

A sucessão é, pois, limitada e crescente, logo, é convergente.
Cálculo do limite.

Designando por l o limite da sucessão, vem, aplicando limites à fórmula de recorrência que faz parte da definição da sucessão:

$$\lim U_{n+1} = \lim \frac{2U_n + 2}{U_n + 2} \Leftrightarrow l = \frac{2l + 2}{l + 2} \Rightarrow l = \sqrt{2}$$

Notemos, no entanto, que para $U_1 = 2$, por exemplo, de modo análogo se prova que a sucessão é decrescente e, como é minorada, pois, $0 < U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, também é convergente. Aliás, esta sucessão também converge para $\sqrt{2}$, como se pode verificar, repetindo o processo de cálculo seguido em c).

2) *Uma propriedade da fórmula* $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 2}{U_n + 2}$

O facto da sucessão ser crescente ou decrescente, conforme o valor atribuido a U_1 , despertou a nossa atenção para a seguinte propriedade:

Se $U_1 \geq 0$, a fórmula de recorrência

$$U_{n+1} = \frac{2U_n + 2}{U_n + 2}$$

gera sucesões convergentes dos tipos:

1) $0 \leq a_1 < \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{\qquad}{a_n + 2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

que é uma sucessão crescente, sendo lim $a_n = \sqrt{2}$

2) $b_1 > \sqrt{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{2b_n + 2}{b_n + 2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

que é uma sucessão decrescente, sendo limite $b_n = \sqrt{2}$

De notar que estas sucessões podem tomar-se como algorítimos de $\sqrt{2}$, sendo os termos das sucessões de tipo 1 valores aproximados de $\sqrt{2}$, por defeito, e os termos das sucessões de tipo 2 valores aproximados, por excesso.

3) *Generalização*

A propriedade anterior pode generalizar-se com o seguinte enunciado: Se $U_1 \geq 0$, a fórmula de recorrência

$$U_{n+1} = \frac{\alpha U_n + \alpha}{U_n + \alpha}, \quad \alpha > 1 \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

gera sucessões convergentes dos tipos:

1) $0 \leq a_1 < \sqrt{\alpha}$, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha a_n + \alpha}{a_n + \alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

que é uma sucessão crescente, sendo lim $a_n = \sqrt{\alpha}$

2) $b_1 > \sqrt{\alpha}$, $b_{n+1} = \dfrac{\alpha b_n + \alpha}{b_n + \alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

que é uma sucessão decrescente, sendo lim $b_n = \sqrt{\alpha}$

Demonstração

Considere-se a restrição da funções homográfica

$$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \text{ com } f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha} \quad \alpha > 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

Observando que esta função é um prolongamento da função definida pela fórmula de recorrência:

$$\alpha U_n + \alpha$$

$U_{n+1} = \dfrac{\qquad}{U_n + \alpha}$, $\alpha > 1 \in \mathbb{R}$ e $U_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Nota: $U_1 \geq 0 \Rightarrow U_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que se demonstra por indução.

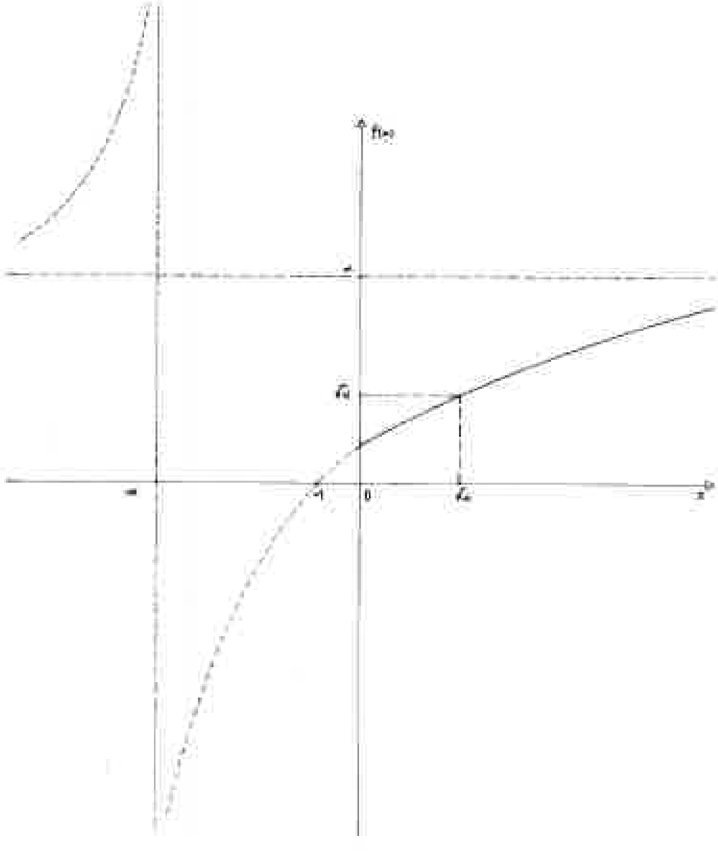
Estudemos f e desenhemos o seu gráfico.

i) $D_f = \mathbb{R}_0^+$ ii) f é contínua em todo o seu domínio.

iii) $f'_{(x)} = \dfrac{\alpha^2 - \alpha}{(x+\alpha)^2} = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{(x+\alpha)^2} > 0$, $\forall x \in D_f$ e , portanto , f é crescente.

iv) $f''_{(x)} = \dfrac{-2\alpha(\alpha-1)}{(x+\alpha)^3} < 0$, $\forall x \in D_f$ e, portanto, f é côncava.

v) *Assíntotas*: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{(x)} = \alpha$, logo, $y = \alpha$ é assíntota horizontal.



completou o gráfico do prolongamento de f ao domínio IR-
- hipérbole de assíntotas paralelas aos eixos.

Por ser importante na demonstração que vamos fazer, assinalou-se , no gráfico, o ponto ($\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha}$). Note-se que este ponto pertence ao gráfico, pois que,

$f_{(x)} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{\alpha}$, logo, $f_{(\sqrt{\alpha})} = \sqrt{\alpha}$.

Notemos ainda que $f_{(x)} > x \Leftrightarrow x < \sqrt{\alpha}$
Com efeito:

$$\frac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha} > x \Leftrightarrow \frac{-x^2+\alpha}{x+\alpha} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{\alpha}-x)(\sqrt{\alpha}+x)}{x+\alpha} > 0$$

Como $\alpha > 1$ e $x > 0$, então

$$\frac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha} > x \quad \Leftrightarrow x < \sqrt{\alpha}$$

De modo análgo se tem $f_{(x)} < x \Leftrightarrow x > \sqrt{\alpha}$
Temos pois:

a) $x < \sqrt{\alpha} \Rightarrow f_{(x)} > x$
e como f é crescente,

b) $x < \sqrt{\alpha} \Rightarrow f_{(x)} < f_{(\sqrt{\alpha})} = \sqrt{\alpha}$

As alineas a) e b) têm, respectivamente, a seguinte interpretação, relativa à fórmula de recorrência, a qual, não o esqueçamos, é uma restrição de f:

a') Se $U_n < \sqrt{\alpha} \Rightarrow U_{n+1} > U_n$, $\forall n \in IN$

b') Se $U_n < \sqrt{\alpha} \Rightarrow U_{n+1} < \sqrt{\alpha}$, $\forall n \in IN$

Resulta, pois, em virtude de b')

$U_1 < \sqrt{\alpha} \Rightarrow U_2 < \sqrt{\alpha} \Rightarrow \ldots \Rightarrow U_n < \sqrt{\alpha} \ldots$
O que prova que a sucessão é majorada, isto é,

$U_n < \sqrt{\alpha}$, $\forall n \in IN$.

Mas se $U_n < \sqrt{\alpha}$, $\forall n \in IN$, então por a'), temos que

$U_{n+1} > U_n$, $\forall n \in IN$ e, portanto, a sucessão é crescente. Se a sucessão é crescente e majorada, é convergente, e, designando-se por l o seu limite, obtemos, aplicando limites à fórmula de recorrência, $l = \sqrt{\alpha}$.

Próvamos, assim, que a fórmula $U_{n+1} = \dfrac{\alpha U_n + 2}{U_n + \alpha}$

gera sucessões do tipo 1. O desenho do gráfico foi feito com a intenção de esclarecer a demonstração.

Escolhendo $U_1 > \sqrt{\alpha}$ e, atendendo a que $x > \sqrt{\alpha} \Rightarrow f_{(x)} < x$
e que

$x > \sqrt{\alpha} \Rightarrow f_{(x)} > f_{(\sqrt{\alpha})} = \sqrt{\alpha}$,

prova-se de um modo semelhante a geração das sucessões de tipo 2.

4 - *Consequências*

1ª *Consequência*

Para cada $U_1 > 0$ a fórmula $U_{n+1} = \dfrac{\alpha U_n + \alpha}{U_n + \alpha}$ $(\alpha > 1 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

gera sempre uma sucessão convergente para $\sqrt{\alpha}$.

De facto:

$U_1 < \sqrt{\alpha} \vee U_1 > \sqrt{\alpha} \vee U_1 = \sqrt{\alpha}$

Ora, pela propriedade demonstrada temos que se $U_1 < \sqrt{\alpha}$, ou se $U_1 > \sqrt{\alpha}$ a fórmula gera, em cada caso, uma sucessão convergente para $\sqrt{\alpha}$.

Se $U_1 = \sqrt{\alpha}$, então, atendendo a que $f_{(\sqrt{\alpha})} = \sqrt{\alpha}$, a fórmula de recorrência gera uma sucessão, de termos todos iguais a $\sqrt{\alpha}$ e, portanto, convergente para $\sqrt{\alpha}$.

2ª *Consequência*

As sucessões dos tipos 1) e 2) podem tomar-se como algoritmos de $\sqrt{\alpha}$. Os termos das sucessões 1) são valores aproximados de $\sqrt{\alpha}$, por defeito, e os valores das sucesões 2) aproximados , por excesso.

Para determinar $\sqrt{\alpha}$, com erro inferior a Σ, calculamos os termos das sucessões designados por a_k e b_p, tais que:

$$b_p - a_k \leq \Sigma$$

Como $a_k < \sqrt{\alpha} < b_p$, então, $b_p - a_k \leq \Sigma \Rightarrow \sqrt{\alpha} - a_k < \Sigma$

Exemplo: Calcular $\sqrt{5}$, por defeito, a menos de 0,01

Tomando $a_1 = 2 < \sqrt{5}$, $b_1 = 3 > \sqrt{5}$ e considerando a fórmula de recorrência

$$U_{n+1} = \frac{5U_n + 5}{U_n + 5}$$

Sucessões de tipo 1

$a_2 = \frac{15}{7} = 2,1 \ldots$

$a_3 = \frac{11}{5} = 2,2$

$a_4 = \frac{20}{9} = 2,22 \ldots$

$a_5 = \frac{29}{13} = 2,23 \ldots$

Sucessões de tipo 2

$b_2 = \frac{5}{2} = 2,5$

$b_3 = \frac{7}{3} = 2,33 \ldots$

$b_4 = \frac{25}{11} = 2,27$

$b_5 = \frac{9}{4} = 2,25$

$b_6 = \frac{65}{29} = 2,24 \ldots$

$b_7 = \frac{47}{21} = 2,238 \ldots$

Como $b_7 - a_5 < 0,01$ então $a_5 = 2,23$ é o valor $\sqrt{5}$ calculado por defeito a memos de uma centésima.

5 - Nota Final

A função $f: \mathbb{R} - \{ \alpha \} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$$

onde se considerou α constante tem por gráfico uma hipérbole para cada valor de α. Por isso, podemos afirmar que a equação $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$ representa uma família de hipérboles equiláteras, de assíntotas paralelas aos eixos coordenados. No gráfico da fig. 1, desenhámos a hipérbole dessa família que corresponde a $\alpha = 5$.

Numa tentativa de aprofundar o conhecimento da função em causa, vamos considerar:

$f: \mathbb{R}^2 - \{(x,y)\} - \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \} \to \mathbb{R}$ sendo f definida por $f(x,y) = \frac{xy + y}{x + y}$ ou seja por $z = \frac{xy + y}{x+y}$

Da equação anterior resulta para $x+y \neq 0$

$$xy + yz - xy - y = 0$$

que representa uma quádrica que vamos identificar.

Matriz da quádrica $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Valores próprios de A: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = -1$

Vectores próprios ortonormalizados:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{-2}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{\sqrt{6}}\right),\ \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Fórmulas de mudança de coordenadas do referencial $0xyz$, para o referencial $0x_1y_1z_1$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \\ y = \frac{-2}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \\ Z = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \end{cases}$$

Equação da quádrica no referencial $0x_1y_1z_1$

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - z_1^2 + \frac{2y_1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 = 0$$

Efectuando a translação de eixos para o centro da quádrica, resulta no referencial $0_1x_2y_2z_2$ a equação da quádrica na forma:

$$2x_2^2 + 2y_2^2 - 4z_2^2 = 1$$

na qual reconhecemos o hiperbolóide de uma folha de semieixos $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c = \frac{1}{2}$.

Concluímos agora que a função em estudo tem por gráfico em $0xyz$, a porção daquele hiperbolóide, cuja projecção no plano $x0y$ é:

$\mathbb{R}^2 - \{(x,y): x + y = 0\}$.

Considerando ainda o referencial $0xyz$, sabemos que a intersecção da quádrica, com os planos $y = \alpha$, é representada, analiticamente, pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} z = \dfrac{xy + y}{x+y} \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x\alpha + \alpha}{x+\alpha} \\ y = \alpha \end{cases}$$

Como os planos $y = \alpha$ são paralelos ao plano $x0z$, então, as linhas $z = \dfrac{x\alpha + \alpha}{x+\alpha}$, situadas nos planos $y = \alpha$, projectam-se ortogonalmente no plano $x0z$, em verdadeira grandeza, obtemos, por isso, no plano $x0z$, como resultado dessas projecções, as linhas definidas por:

$$z = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha} \text{ ou seja por } f(x, \alpha) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$$

referimos no início desta nota e que, pelo exposto não estranhamos terem a forma de hipérboles.

Para finalizar observamos que não é privilégio da função homógrafica originar restrições geradoras das sucessões dos tipos 1) e 2). De facto, as funções f: [a, b] -> R que sejam crescentes e contínuas, tais que:

i) $f_{(x)} = x$ admite uma raíz única que designamos por l.

ii) $x < l \Rightarrow f_{(x)} > x$

(ii) $x > l \Rightarrow f_{(x)} < x$

podem originar restrições geradoras de sucessões dos tipos 1) e 2).

Na próxima oportunidade provaremos a proposição anterior e faremos aplicações.

Agradeço a colaboração oferecida quer pelos Serviços de Documentação e Informação quer pelos Serviços de Instalação e Equipamento deste I.P.G .