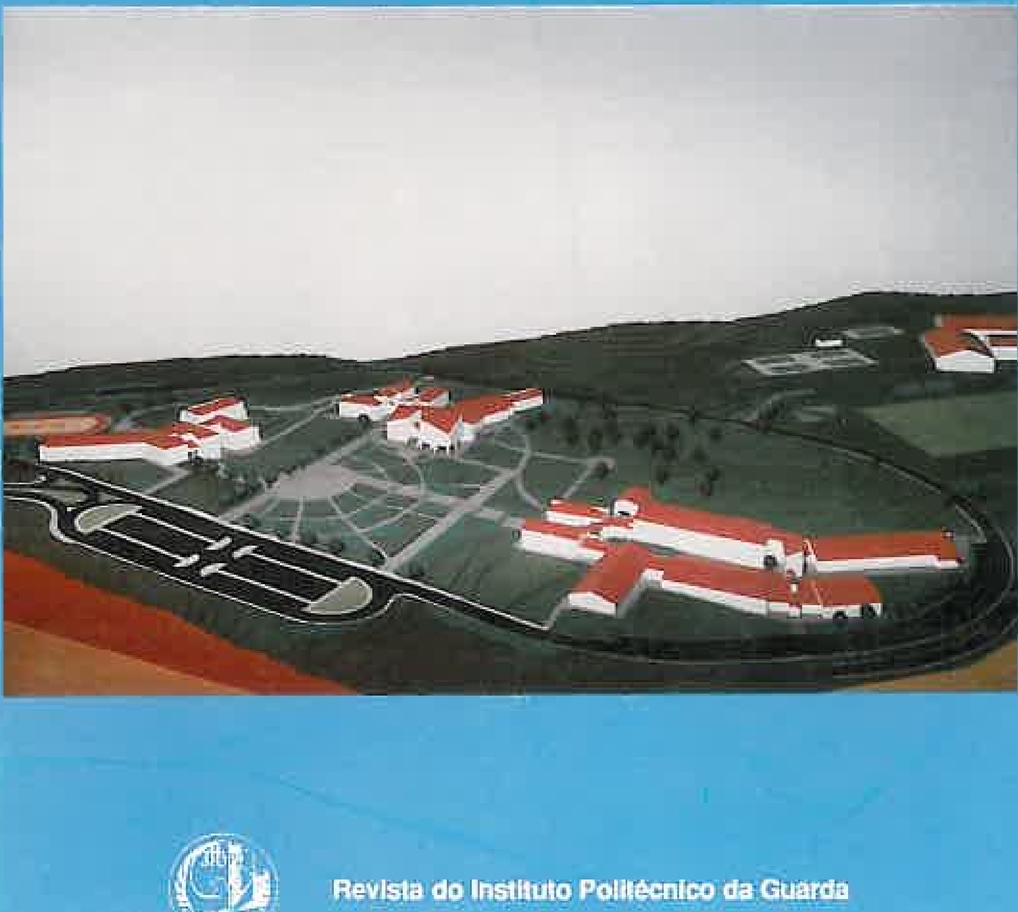
EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA



Revista do Instituto Politécnico da Guarda

"EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA"
Revista do Instituto Politecnico da Guarda

DIRECTOR: João Bento Raimundo

REDACÇÃO: Rua Comandante Salvador do Nascimento
Telef. 21634 6300 GUARDA

PROPRIEDADE: Instituto Politécnico da Guarda

EXECUÇÃO GRÁFICA: Secção de Reprografia do IPG

Depósito Legal N.º 17.891/87

Nº 5 / Setembro / 89

ABERTURA PARA O MUNDO ...

"Português que viva apenas para Portugal, como acho queria o Velho do Restelo, não tem significado algum nem vale a pena existir no mundo; temos de viver para o universo, ou seremos inúteis".

Agostinho da Silva

Sempre defendemos a formação integral do indivíduo. Tal significa, para nós, em termos globais, o crescimento perante conhecimentos gerais e específicos; o acordar das potencialidades de cada um; a afirmação do indivíduo perante ele próprio, em primeiro lugar, perante os outros e o mundo, depois; o, já tantas vezes referido, saber, saber fazer, saber ser; enfim, um caminhar efectivo para a realização e para a felicidade.

O presente número, o quinto, de "Educação e Tecnologia", enquanto "um espaço aberto", objectivo — génese da sua existência e da sua afirmação — na linha do que atrás referimos, inclui já a participação de professores de Instituições ligadas ao Instituto Politécnico da Guarda pelo Programa Erasmus. Isto constitui um sinal evidente da cooperação que, a vários níveis, há alguns meses atrás, foi acordada em protocolos com Bayonne, Brighton, Coventry, Créteil, Pau e Salamanca.

Este aprofundamento de relações entre instituições europeias de ensino superior veio favorecer a vivência do espírito comunitário e imprimir nos alunos a consciencialização do conceito da nova Europa da cultura e dos cidadãos.

Defendemos e prosseguimos um caminho de abertura para o mundo das coisas, das pessoas e do saber, numa perspectiva integradora em que a verdadeira dimensão do humano se procure, se veja e se consubstancie na efectiva comunhão do universal.

João Bento Raimundo

Presidente da C. I. do
Instituto Politécnico da Guarda

UTILIZAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO INTEIRA NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DOS VIAJANTES

Amândio Pereira Baía*

RESUMO: Embora existam algoritmos mais refinados para a resolução do problema dos viajantes, a programação inteira, dada a sua aplicabilidade na vida real e a existência de meios informáticos cada vez mais poderosos, permite ao gestor resolver este tipo de problema.

INTRODUÇÃO

O problema dos viajantes tende a ser de dimensão bastante grande, pois precisa de analisar um grande número de combinações o que consequentemente o torna de difícil resolução, apesar de continuar a ser objecto de um estudo aprofundado dada a sua aplicação na vida real.

Muito embora tenha existido durante os últimos anos um certo progresso no desenvolvimento de algoritmos eficientes(1) e programas de computador para resolver este tipo de situação, apresentamos neste artigo a formulação e resolução do problema como um caso de programação inteira(2). Cientes da necessidade de um eficiente processo de computação para a resolução do modelo a apresentar, a facilidade de utlização de meios de cálculo cada vez mais poderosos vem ajudar na resolução deste tipo de problemas.

Definição do Problema

Consideramos a situação em que um viajante tem de visitar uma série de cidades de modo a que a distância total percorrida

*Professor Adjunto da E.S.T.G.

seja mínima. Se definirmos um *tour*[3] como uma sequência de cidades que começa e acaba com a mesma cidade e que inclui a visita a todas as outras uma e apenas uma vez, então o problema dos viajantes pode ser posto da seguinte maneira: encontrar o *tour* com o menor comprimento para um dado conjunto de cidades.

Por uma questão de simplicidade vamos centrar todo o nosso raciocínio numa situação em que existam apenas cinco cidades.

Encontrar o *tour* com o custo mínimo pode ser formulado como um problema de programação inteira 0-1[4]. A variável de decisão x_{ij} é igual a 1 se o *tour* incluir uma viagem da cidade *i* para a cidade *j* e igual a 0 se não houver uma viagem da cidade *i* para a *j*. O objectivo é minimizar o custo total do *tour* ou a distância, onde c_{ij} é definido como o custo (ou distância) associado com a viagem da cidade *i* para a cidade *j*. Isto conduz à seguinte forma da função objectivo:

$$\text{minimizar } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

onde *n* iguala o número total de cidades a serem visitadas (incluindo o ponto de partida).

Um valor de $x_{ij} = 1$ quando $i = j$ não tem sentido pois não tem cabimento uma viagem com partida numa dada cidade e chegada a essa mesma cidade. Para evitar que estas variáveis tomem o valor de um, devem ser excluídas da formulação do problema ou atribuir-lhes um coeficiente extremamente elevado na função objectivo.

O conjunto de restrições relativas ao problema consiste em três tipos. O primeiro assegura que cada cidade seja visitada exactamente uma vez:

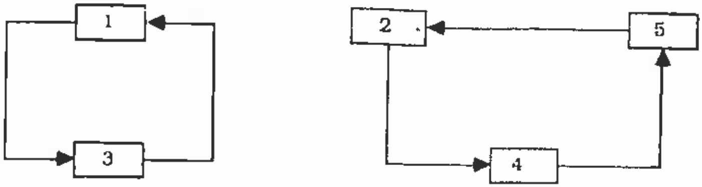
$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

O segundo conjunto assegura que exista apenas uma saída de cada uma das cidades:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Se não houvesse mais restrições, poderia haver valores para as variáveis de decisão que satisfizessem os conjuntos (2) e (3) mas que não constituíssem o objectivo do viajante. A formulação apresentada permite *sub-tours*(5). A figura 1 ilustra uma solução para o problema apresentado que começa e termina na cidade 1. Note-se que esta solução representa uma solução matemática válida para o problema representado pelo conjunto de restrições (2) e (3). Mas, como não é conseguido um *tour*, esta solução não tem significado no mundo real. Consequentemente, é necessário incluir um terceiro conjunto de restrições que proíba os *sub-tours*, tais como os apresentados na figura 1.

Figura 1



Para prevenir os *sub-tours* deve-se simplesmente especificar que, se houver uma viagem da cidade *i* para a cidade *j*, então não pode haver da cidade j para a cidade i. Por exemplo para prevenir o *sub-tour* entre as cidades 1 e 3 deve-se escrever a seguinte restrição:

$$X_{13} + X_{31} \leq 1$$

Para prevenir o *sub-tour* entre as três cidades, duas restrições devem ser construídas para cada combinação de três cidades. Por exemplo, todos os *sub-tours* entre as cidades 3, 4 e 5 podem ser prevenidos especificando as seguintes restrições:

$$X_{24} + X_{45} + X_{52} \leq 2$$

$$X_{25} + X_{54} + X_{42} \leq 2$$

Note que a primeira destas restrições elimina o *sub-tour* indicado na figura 1. Note ainda que esta restrição implica viajar da cidade 2 para a 4, da 4 para a 5 e da 5 para a 2. Algebricamente, não interessa onde se começa num *tour* circular. Por exemplo, a restrição que elimina a possibilidade de viajar da cidade 4 para a 5 para a 2 e novamente para a 4 é matematicamente igual à primeira restrição.

Consideremos agora o seguinte: para um *tour* envolvendo cinco cidades apenas os *sub-tours* de duas cidades devem ser prevenidos de modo a eliminar a possibilidade de todos os outros *sub-tours*. Se todos os *sub-tours* de duas cidades forem eliminados, então o conjunto de restrições (2) e (3) garante-nos que todos os *sub-tours* de três cidades também o são num problema de cinco cidades. Na figura 1, por exemplo, se o *sub-tour* entre a cidade 1 e 3 for eliminado pela restrição apropriada, então o *sub-tour* de três cidades não mais é possível. Mais ainda, num problema de cinco cidades, os *sub-tours* de 4 cidades não são possíveis, pois o *sub-*

-*tour* de uma cidade (x_{ij} = 1 para i = j) não é permitido. Finalmente o número de *sub-tours* de duas cidades num problema de cinco cidades é dado pelas combinações de cinco, tomadas dois a dois[6], ou seja dez. Como apenas uma restrição elimina qualquer *sub-tour* de duas cidades,são precisas dez restrições para eliminar todos os *sub-tours* num problema de cinco cidades.

Finalmente as condições de não negatividade devem ser especificadas: x_{ij} = inteiros não negativos para todo o i e j.

Aplicação prática

Como ilustração do problema dos viajantes consideramos a seguinte situação: Suponha que um dado viajante tem a sua sede na cidade 1 e deseja encontrar um *tour* entre cada uma das outras quatro cidades de modo a que a distância (custo total, tempo, despesas ou qualquer outra combinação destes) percorrida seja mínima. A tabela 1 apresenta as distâncias (em Kms) entre as diversas cidades a serem visitadas.

		Para a cidade				
		1	2	3	4	5
Da cidade	1	0	22	34	42	30
	2	22	0	14	28	15
	3	29	16	0	26	22
	4	42	32	28	0	20
	5	30	18	25	15	0

Note que as distâncias entre as cidades não são todas simétricas. Por exemplo a distância entre as cidades 1-3 não é igual à distância entre as cidades 3-1. Esta situação pode aparecer devido, por exemplo, a realização de trabalhos na estrada que aumentam a distância numa direcção mas não na outra.

A formulação do problema proposto bem como a sua resolução é apresentado no Apêndice A. Repara-se que neste caso o viajante teria de percorrer 109 quilómetros e fazer a sequência de visitas apresentadas na Figura 2, de forma a percorrer o número mínimo de quilómetros:

tour ———> 1 — 2 — 5 — 4 — 3 — 1.

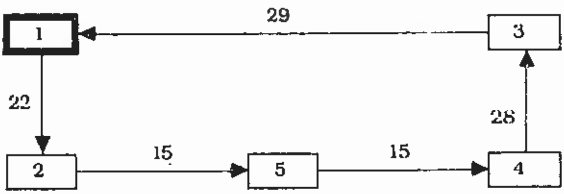


Figura 2

Note-se que, se na solução final a variável x_{ij} for igual a um, significa que o viajante parte da cidade *i* para a cidade *j*. Assim por exemplo $X_{54} = 1$ significa que o viajante terá de ir em dada altura da cidade 5 para a cidade 4. Não esqueçamos que a solução apresentada não viola a definição de *tour* atrás descrito.

CONCLUSÃO

Muito embora existam algoritmos mais eficientes para resolver o problema dos viajantes, contudo o método descrito continua a ser de grande utilidade na vida real. Lembramos que a resolução da aplicação proposta por enumeração total levaria a uma análise de 120 (ou seja 5!) *tours* possíveis. No caso de existirem 10 cidades a serem visitadas então teriam de ser analisados 3 628 200 (ou seja 10!) *tours* o que de facto estará fora de questão.

É interessante ainda notar que este tipo de modelo é aplicável a numerosas e diversas situações da vida real; talvez seja raramente aplicado a problemas dos viajantes.

Outras situações onde tem sido aplicado este tipo de modelo compreendem, por exemplo, a definição de caminhos a percorrer por camiões, o percurso a percorrer em campanhas políticas, o escalonamento de tarefas em dada máquina, bem como outros problemas que abranjam decisões sequenciais.

APÊNDICE

```
MIN      22 X12 + 34 X13 + 42 X14 + 30 X15 + 22 X21 + 14 X23 + 28 X24
     + 15 X25 + 29 X31 + 16 X32 + 26 X34 + 42 X41 + 32 X42 + 28 X43
     + 20 X45 + 30 X51 + 18 X52 + 25 X53 + 15 X54 + 22 X35
          SUBJECT TO
                  2)   X21 + X31 + X41 + X51 =    1
                  3)   X12 + X32 + X42 + X52 =    1
                  4)   X13 + X23 + X43 + X53 =    1
                  5)   X14 + X24 + X34 + X54 =    1
                  6)   X15 + X25 + X45 + X35 =    1
                  7)   X12 + X13 + X14 + X15 =    1
                  8)   X21 + X23 + X24 + X25 =    1
                  9)   X31 + X32 + X34 + X35 =    1
                 10)   X41 + X42 + X43 + X45 =    1
                 11)   X51 + X52 + X53 + X54 =    1
                 12)   X12 + X21 <=   1
                 13)   X13 + X31 <=   1
                 14)   X14 + X41 <=   1
                 15)   X15 + X51 <=   1
                 16)   X23 + X32 <=   1
                 17)   X24 + X42 <=   1
                 18)   X25 + X52 <=   1
                 19)   X34 + X43 <=   1
                 20)   X53 + X35 <=   1
                 21)   X45 + X54 <=   1
          END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 18

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 109.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X12	1.000000	.000000
X13	.000000	10.000000
X14	.000000	7.000000
X15	.000000	2.000000
X21	.000000	.000000
X23	.000000	3.000000
X24	.000000	6.000000
X25	1.000000	.000000
X31	1.000000	.000000
X32	.000000	.000000
X34	.000000	.000000
X41	.000000	.000000
X42	.000000	3.000000
X43	1.000000	.000000
X45	.000000	.000000
X51	.000000	.000000
X52	.000000	1.000000
X53	.000000	9.000000
X54	1.000000	.000000
X35	.000000	3.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	-42.000000
3)	.000000	-29.000000
4)	.000000	-28.000000
5)	.000000	-39.000000
6)	.000000	-32.000000
7)	.000000	4.000000
8)	.000000	17.000000
9)	.000000	17.000000
10)	.000000	.000000
11)	.000000	12.000000
12)	.000000	3.000000
13)	.000000	.000000
14)	1.000000	.000000
15)	1.000000	.000000
16)	1.000000	.000000
17)	1.000000	.000000
18)	.000000	.000000
19)	.000000	.000000
20)	1.000000	.000000
21)	.000000	12.000000

REFERÊNCIAS

(1) - Bellmore, M., and G. L. Nemhauser, *The Travelling Salesman Problem: A survey*, Operations Research, vol 16, pp 538-558, 1968.

(2) - Budnick, Mojena and Volmann, *Principles of Operations Research for Management*, Richard D. Irwin Inc.

(3) - Lee, Moore and Tayolor, *Management Science*, WCB, Wm. C. Brown Company.

(4) - Kim, *Quantitave Analysis for Managerial Decision Without Algoritms*, Prentice-Hall, Inc.

(5) - Eppon and Gould, *Quantitative Concepts for Managementt Decision Without Algoritms*, Prentice-Hall, Inc.

(6) - Anderson, Sweeney and Willians, *An introduction to Management Science*, West Publishing Company.