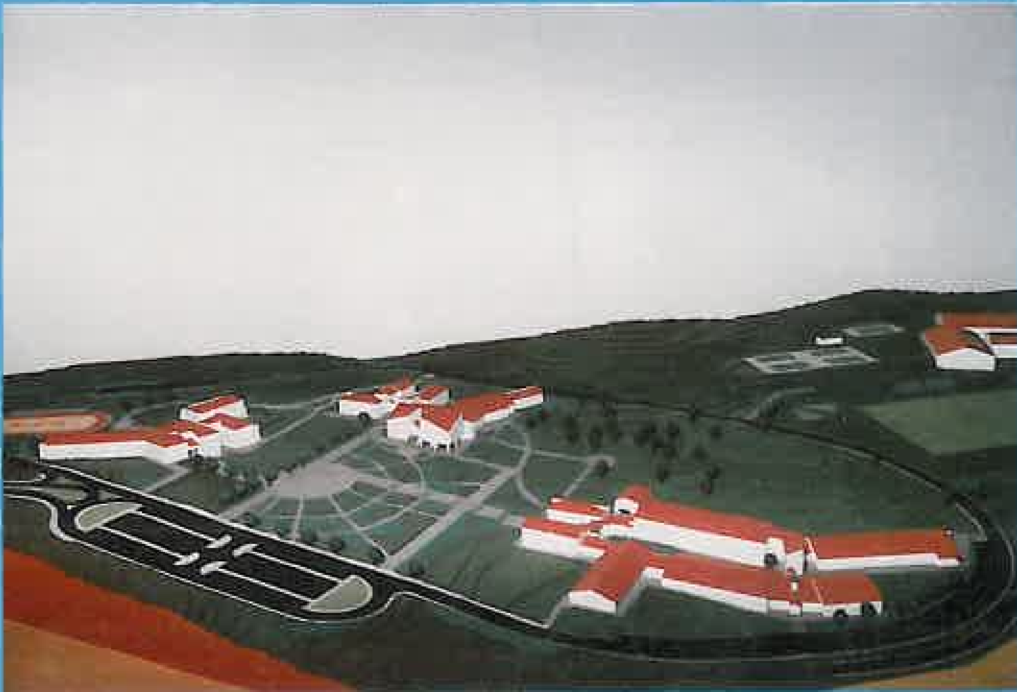
EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA



Revista do Instituto Politécnico da Guarda

"EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA"
Revista do Instituto Politecnico da Guarda

DIRECTOR: João Bento Raimundo

REDACÇÃO: Rua Comandante Salvador do Nascimento
Telef. 21634 6300 GUARDA

PROPRIEDADE: Instituto Politécnico da Guarda

EXECUÇÃO GRÁFICA: Secção de Reprografia do IPG

Depósito Legal N.º 17.891/87

Nº 5 / Setembro / 89

ABERTURA PARA O MUNDO ...

"Português que viva apenas para Portugal, como acho queria o Velho do Restelo, não tem significado algum nem vale a pena existir no mundo; temos de viver para o universo, ou seremos inúteis".

Agostinho da Silva

Sempre defendemos a formação integral do indivíduo. Tal significa, para nós, em termos globais, o crescimento perante conhecimentos gerais e específicos; o acordar das potencialidades de cada um; a afirmação do indivíduo perante ele próprio, em primeiro lugar, perante os outros e o mundo, depois; o, já tantas vezes referido, saber, saber fazer, saber ser; enfim, um caminhar efectivo para a realização e para a felicidade.

O presente número, o quinto, de "Educação e Tecnologia", enquanto "um espaço aberto", objectivo — génese da sua existência e da sua afirmação — na linha do que atrás referimos, inclui já a participação de professores de Instituições ligadas ao Instituto Politécnico da Guarda pelo Programa Erasmus. Isto constitui um sinal evidente da cooperação que, a vários níveis, há alguns meses atrás, foi acordada em protocolos com Bayonne, Brighton, Coventry, Créteil, Pau e Salamanca.

Este aprofundamento de relações entre instituições europeias de ensino superior veio favorecer a vivência do espírito comunitário e imprimir nos alunos a consciencialização do conceito da nova Europa da cultura e dos cidadãos.

Defendemos e prosseguimos um caminho de abertura para o mundo das coisas, das pessoas e do saber, numa perspectiva integradora em que a verdadeira dimensão do humano se procure, se veja e se consubstancie na efectiva comunhão do universal.

João Bento Raimundo

Presidente da C. I. do
Instituto Politécnico da Guarda

SUCESSÕES REAIS DEFINIDAS PELA FÓRMULA $x_{n+1} = f(x_n)$

Henrique Varandas Esteves *

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No artigo "Considerações acerca de uma sucessão" publicado no último número desta revista detectámos os seguintes erros:

Na última linha da página 189 nada deve figurar;

Na primeira linha da página 190 deve ler-se

$$u_{n+1} = \frac{\alpha U_n + \alpha}{U_n + \alpha} \quad \text{em vez de} \quad u_{n+1} = \frac{\qquad}{U_n + \alpha}$$

Na linha 25 da página 193 deve ler-se $xz + yz - xy - y = 0$ em vez de $xy + yz - xy - y = 0$;

Na linha 14 da página 192 a disjunção é exclusiva pelo que deve ser representada por $\dot{\vee}$.

Em relação às propriedades invocadas na página 195 do mesmo artigo e que dizem respeito a funções crescentes obedecendo a certas condições, o Prof. Doutor Álvaro Bento Leal

* Professor Adjunto da ESTG.

chamou-nos a atenção para o papel importante que desempenha a condição $f(x)=x$ (existência do ponto fixo). Começaremos portanto por referir conceitos e proposições respeitantes à existência do ponto fixo de Banach.

Seja o espaço métrico (S,d). S é um conjunto e d a função distância definida axiomaticamente (ver Análise Matemática - Tom Apostol página 73).

Suponhamos que toda a sucessão de Cauchy definida em S converge para $L \in S$, isto é, (S,d) é um espaço completo.

Consideremos a função $f: S \to S$ que obedece à condição de Lipsichtz:

$$d\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq M \; d(x_1,x_2) \;, \quad \forall x_1, x_2 \in S \text{ e } M \in \mathbb{R}^+$$

No caso de $M < 1$ f diz-se uma contracção e prova-se que se f é uma contracção, existe uma e uma só solução da equação

$$f(x) = x$$

Em particular, considerando $x, y \in \mathbb{R}^n$ e definindo aí,

$d(x,y) = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ (distância euclideana) em que $x = (x_1,x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots ,y_n)$ resulta $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico completo.

Também se prova que todo o intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ (que é conjunto compacto) é um espaço métrico - subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Portanto:

Se $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to [a, b]$ é uma contracção então existe um e um só ponto fixo em $[a, b]$, ou seja existe uma e uma só solução da equação $f(x) = x$ em $[a,b]$.

Se $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to [a, b]$ e $f \in C^1([a, b])$ podemos escrever em virtude do teorema de Lagrange

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c) \;, \quad c \in \,]x_1, x_2[\;, \quad x_1, x_2 \in [a, b]$$

Admitindo que $|f'(x)| < 1$ para qualquer $x \in \,]a, b[$ vem tomando módulos:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1| \,.\, M \quad \text{com } 0 \leq M < 1 \quad \text{pois } M = |f'(c)| < 1$$

e por isso f é uma contracção e em consequência fica garantida a existência de um e só um ponto fixo de f em $[a, b]$.

No desenvolvimento do tema faremos notar a relação do que acabámos de expor com certas condições das propriedades que vamos abordar as quais dizem respeito a sucessões definidas por recorrência.

1. PROPRIEDADES DA SUCESSÃO

1.1 - Propriedades Relativas à Convergência

Propriedade 1

Se $f(x)$: $[a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua e crescente e além disso são cumpridas as condições:
i) $f(x) = x$ admite L como única raiz (existência do ponto fixo).
ii) $x \leq L \Rightarrow f(x) \geq x$
iii) $x_1 \in [a, b]$ e $x_1 \leq L$

então a fórmula

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

gera uma sucessão crescente que converge para L

Demonstração:

a) $x \leq L \Rightarrow f(x) \geq x$, por hipótese. Além disso como f é crescente vem:
$x \leq L \Rightarrow f(x) \leq f(L)$. Mas $f(L) = L$ e portanto:

b) $x \leq L \Rightarrow f(x) \leq L$

As alíneas a) e b) têm a seguinte interpretação na fórmula $x_{n+1} = f(x_n)$:
em virtude de b)
$x_1 \leq L \Rightarrow x_2 = f(x_1) \leq L$ e assim sucessivamente teremos
$x_1 \leq L \Rightarrow x_2 \leq L \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_n \leq L \Rightarrow \ldots$, logo

a') $x_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $\{x_n\}$ é majorada por L. Também se conclui que $f(x_n)$ é uma restrição de f se atendermos a que $x_n \in [x_1\ L] \subset [a, b]$ e que f é contínua em $[a, b]$.

Atendendo a a) e a') vem:
$x_1 \leq L \Rightarrow x_2 = f(x_1) \geq x_1$ Mas $x_2 \leq L \Rightarrow x_3 = f(x_2) \geq x_2$

Repetindo o procedimento concluímos:

b') $x_1 \leq L \Rightarrow x_2 \geq x_1 \Rightarrow x_3 \geq x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow \ldots$

Concluímos pois que $\{x_n\}$ é crescente.

Ora sendo $f(x_n)$ crescente e majorada é convergente. Seja $k = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Consideremos a restrição de f.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

e tomemos limites quando $n \to +\infty$. Vem

$$k = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(k)$$

De notar que $x_1 \leq k \leq L$ e portanto $k \in [a, b]$.

Mas $f(x) = x$ admite uma e só uma raiz em $[a, b]$ e como por hipótese essa raiz foi designada por L será $k = L$. Temos pois

$$\lim x_n = L$$

Propriedade 2

Se $f(x) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e crescente e além disso são cumpridas as condições

i) $f(x) = x$ admite L como única raiz
ii) $x \geq L \Rightarrow f(x) \leq x$
iii) $x_1 \in [a, b]$ e $x_1 \geq L$

então a fórmula

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

gera uma sucessão decrescente a qual converge para L.

A prova é análoga à anterior.

1.1.1 Comportamento da Derivada

Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função das hipóteses das propriedades 1) e 2), mas admitamos agora que $f \in C^2([a, b])$

A razão incremental de f relativa a $x = L$, cumpre as condições

$$0 < \frac{f(x) - f(L)}{x - L} < 1$$

De facto para $x < L$ temos:

$$\frac{f(x) - f(L)}{x - L} = \frac{f(x) - L}{x - L} = \frac{L - f(x)}{L - x} > 0$$

Além disso para $x < L$ é $f(x) > x$, pelo que $L - f(x) < L - x$ e como $L - x > 0$, vem:

$$\frac{L - f(x)}{L - x} < 1$$

Logo

$$0 < \frac{L - f(x)}{L - x} < 1$$

De modo análogo se prova a dupla desigualdade anterior quando $x > L$.

Tomando limites, obtemos:

$$0 \leq f'(L) \leq 1$$

Prova-se, no entanto,que $f'(L) = 1$ apenas se verifica no caso de f ser convexa, em $[x, L]$, ver figura 1.

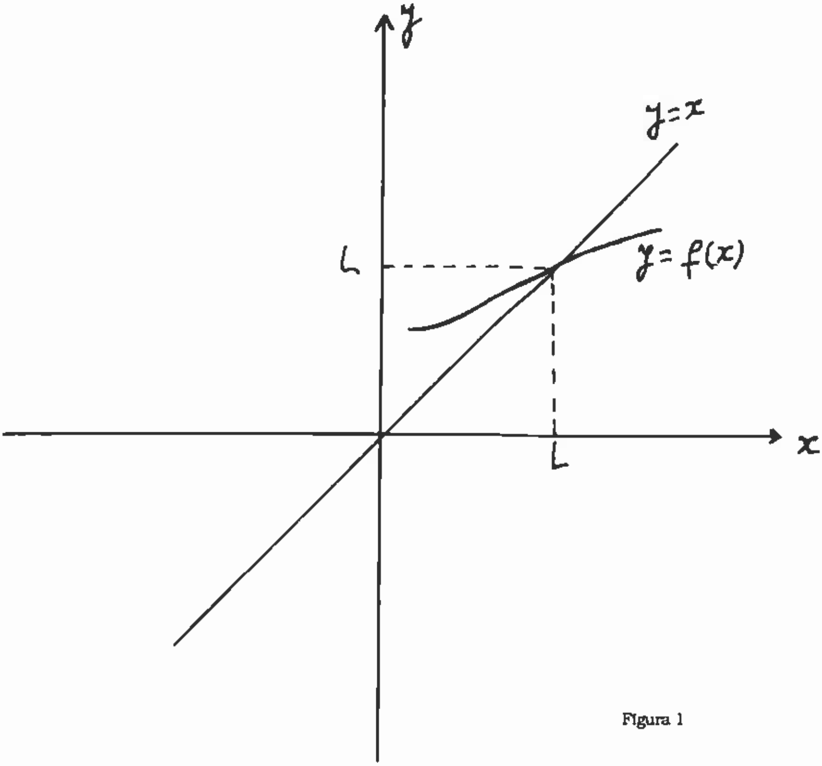


Figura 1

Com efeito, se f é côncava para $x \leq L$, será $f''(x) < 0$, Logo $f'(x)$ é decrescente. Mas pelo teorema de Lagrange

$$f(L) - f(x) = (L - x) f'(c), \quad c \in]x, L[$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(x) - L}{x - L} < 1, \quad \text{como atrás se provou.}$$

Mas se $f'(c) < 1$ e f' é decrescente em $[x, L]$ será $f'(L) < 1$.

É evidente que se f é convexa em $[x, L]$ é $f'' > 0$, logo f' crescente. Como analogamente se prova que existe $c \in]x, L[$, tal que $f'(c) < 1$ então poderá ser $f'(L) = 1$. É claro que nesta hipótese e continuando a verificar-se as condições das propriedades 1) e 2) será f' decrescente para $x > L$, ou seja, L é ponto de inflexão.

Estamos agora em condições de retirar a seguinte conclusão:

Sendo $f \in c^2([a, b])$ e não convexa em $[x, L]$, onde L é a solução única da equação $f(x) = x$ em $[a, b]$, então as propriedades, 1) e 2) são uma consequência do teorema relativo à iteração do ponto fixo (ver Introdução à Análise Numérica, A. Bento Leal, I.P.G., pág. 213 e seguintes).

Nota: Atendendo aos conceitos referidos na Introdução e em consequência das propriedades 1) e 2) temos:

Sendo $f(x) = [a, b] \subset IR \to IR$ contracção crescente

1) Se $x < L \Rightarrow f(x) > x$ sendo L o ponto fixo então a fórmula

$x_{n+1} = f(x_n)$ com $x_1 \leq L$

gera uma sucessão crescente que converge para L

2) Se $x > L \Rightarrow f(x) < x$ (L ponto fixo)

então a fórmula

$x_{u+1} = f(x_u)$, com $x_1 > L$

gera uma sucessão decrescente que converge para L.

1.2 Propriedades Relativas à Divergência

Propriedade 3

Se $f(x) : [a, +\infty[\to IR$ é contínua e

i) $f(x) = x$ admite L como única raiz.

ii) $x > L \Rightarrow f(x) > x$

iii) $x_1 > L$

então a fórmula

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

gera uma sucessão crescente a qual diverge.

Demonstração

Em virtude de ii) vem:

$x_1 > L \Rightarrow x_2 = f(x_1) > x_1$

$x_2 > x_1 \Rightarrow x_3 = f(x_2) > x_2$ e repetindo o processo obtemos

$L < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} <$

isto é, $\{x_n\}$ é estreitamente crescente.

Além disso $\{x_n\}$ não converge, pois que, se tal acontecesse, teríamos

$\lim x_n = k$, $k > L$

e tomando limites em

$x_{n+1} = f(x_n)$

viria

$k = f(k)$

o que contradiz a condição i)

Propriedade 4

Se $f(x)$: $]-\infty, b] \to IR$ é contínua e além disso são observadas as condições

i) $f(x) = x$ admite L como raiz única

ii) $x < L \Rightarrow f(x) < x$

iii) $x_1 < L$

então a fórmula

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

gera uma sucessão decrescente e que diverge.

A demonstração é análoga à anterior.

2. APLICAÇÕES

1. Seja a sucessão que originou estes apontamentos, definida por

$$U_{n+1} = (\alpha u_n + \alpha)/(u_n + \alpha) \quad , \quad \alpha < 1$$

A função prolongamento da anterior que nos interessa considerar é $f(x) = (\alpha x + \alpha)/(x + \alpha)$ definida em $]-\alpha, +\infty[$. Possui os pontos fixos $-\sqrt{\alpha}$ e $\sqrt{\alpha}$. Atendendo ao estudo feito desta função no número anterior desta revista, concluímos de acordo com as propriedades atrás enunciadas:

i) se $-\sqrt{\alpha} < u_1 \leq \sqrt{\alpha}$ a sucessão cresce e converge para $\sqrt{\alpha}$

ii) se $u_1 \geq \sqrt{\alpha}$ " " decresce " " "

2. Em Introdução à Análise Matemática de J. Campos Ferreira manda-se averiguar se a sucessão definida por $u_1 = 1$, $u_{u+1} = \sqrt{2+u_u}$ é limitada.

Ora estudando a natureza da sucessão o problema fica resolvido.

Considere-se a função que corresponde à fórmula de recorrência:

$$f(x) = \sqrt{2+x}$$

Estudando f concluímos que o seu gráfico é parte da parábola $y^2 = 2 + x$ de eixo horizontal e vértice (-2, 0) ver figura 2.

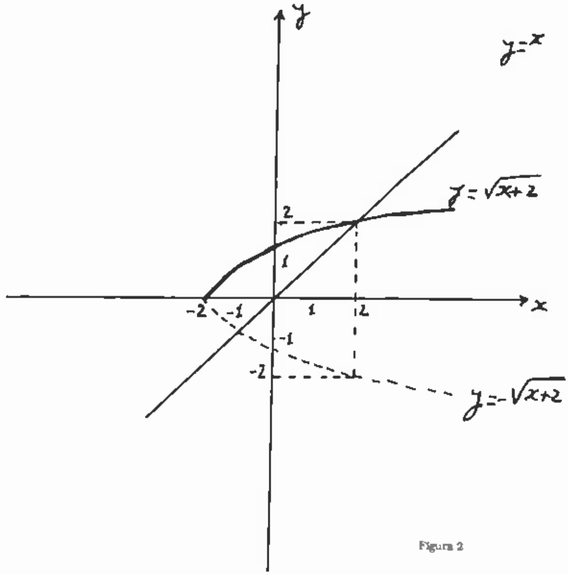


Figura 2

A equação $f(x) = x$ tem por solução em $[-2, +\infty]$ $L = 2$ (ponto fixo).

A aplicação das propriedades 1) e 2) permite-nos concluir que:

i) Se $-2 \leq u_1 \leq 2$ a sucessão é crescente e converge para $L = 2$

ii) Se $u_1 \geq 2$ a sucessão é decrescente e converge para $L = 2$

É claro que no caso proposto é $u_1 = 1 < 2$ e portanto a sucessão proposta é crescente e converge para 2, logo

$$1 \leq U_u < 2 \ , \forall n$$

e U_n é pois limitada.

3. No livro Análisis Matemático - Tom Apostol, pág. 117 é proposto o seguinte problema:

Estudar a sucessão definida por $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 6}{7}$

com $x_1 = 1/2$ ou $x_1 = 3/2$ ou $x_1 = 5/2$

A função correspondente à fórmula de recorrência é $f(x) = \dfrac{(x^3 + 6)}{7}$

A equação $f(x) = x$ tem por soluções

$x_1 = -3$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$

O estudo de f leva-nos ao desenho do seu gráfico, fig. 3

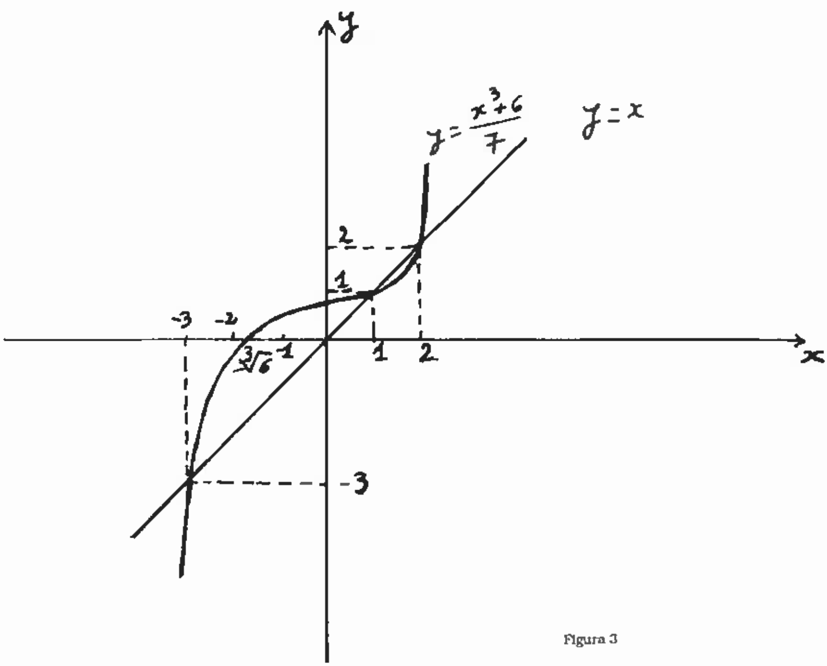


Figura 3

Aplicando as propriedades 1), 2), 3) e 4) podemos concluir que:

i) se $x_1 < -3$ a sucessão decresce e é divergente

ii) se $-3 < x1 < 1$ a sucessão cresce e converge para $L = 1$

iii) se $1 < x_1 < 2$ a sucessão decresce e converge para $L = 1$

iv) se $x_1 > 2$ a sucessão cresce e é divergente

As conclusões anteriores respondem à questão proposta.

3. NOTA FINAL

Resta-nos considerar fórmulas de recorrência

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

que sejam restrições de funções decrescentes.

A propósito seja:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e decrescente,

$L = f(L) \in]a, b[$ o único ponto fixo de f e $x_{n+1} = f(x_n)$ com $x_0 < L$ uma sucessão definida por recorrência. Nestas condições têm lugar as seguintes propriedades:

I) Se $f(f(x)) > x$ para $x < L$, então a subsucessão (x_{2k}) é crescente e convergente para L.

II) Se $f(f(x)) < x$ para $x > L$, então a subsucessão (x_{2k+1}) é decrescente e convergente para L.

Na próxima oportunidade provaremos as propriedades anteriores, exploraremos as consequências e faremos aplicações.

Agradecemos aos Serviços de Documentação e Informação e ao Núcleo de Equipamento deste I.P.G. a colaboração prestada.

BIBLIOGRAFIA:

A. Bento Leal: *Introdução à Análise Numérica* - I.P.G.

F. Pires Valente: *Análise Matemática I* - I.P.G.

J. Campos Ferreira: *Introdução à Análise Matemática* - Fundação C. Gulbenkian

Lothan Collatz: *Functional Analysis and Numerical Mathematics* Academic Press

Tom M. Apostol: *Analisis Matemático* ed. Reverté S.A.