EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA

Revista do Instituto Politécnico da Guarda

EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA

Propriedade
Instituto Politécnico da Guarda

Director
João Bento Raimundo

Redacção
Serviços Centrais do IPG - Quinta do Zambito
6300 Guarda
telf. 222634 * telecópia 222690

Composição
Gabinete Editorial do IPG

Execução Gráfica e Impressão
Secção de Reprografia do IPG

Periodicidade
Semestral

Tiragem
1.000 ex.

Depósito Legal
nº 17.981/87

nº XII - Julho de 1993

Foto da Capa : Campo de Jogos e vista parcial
da Escola Superior de Educação

EVIDÊNCIAS e VALORES

A Revista "**Educação e Tecnologia**" apresenta hoje o seu décimo segundo volume.

Poderemos afirmar, sem hesitações, que é uma publicação solidamente firmada, um título bem projectado no panorama das edições desta natureza.

A nossa Revista, como facilmente se pode verificar, traduziu a evolução registada por este estabelecimento de ensino superior, consubstanciando essa própria evolução, alicerçando colaborações e incentivando novos trabalhos, em vários domínios.

E este percurso não pode passar indiferente às novas estruturas projectadas e que vão ser de importância fundamental para a prossecução de todo um trabalho subjacente à dinâmica cultural, científica e pedagógica de um estabelecimento de ensino superior. Neste contexto, a construção de uma Biblioteca Central no IPG vai responder às exigências hodiernas e contemplar as previsíveis alterações do futuro, tornando-se num permanente centro de documentação e pesquisa.

Daí resultarão, estamos certos, novos e importantes contributos para esta publicação que também aí terá um estatuto de relevo, como produção própria do IPG e veículo de difusão de ciência e cultura.

É que, continuamos de olhos postos no futuro, apostados em servir cada vez melhor, sempre dentro de rigorosos critérios de competência e com permanente afirmação de qualidade.

Se é certo que o sonho comanda a vida, "*aquilo que só existe no sonho* — como escreveu Georges Gusdorf — *resiste melhor à usura do tempo, à degradação das evidências e dos valores.*"

João Raimundo
Presidente da Comissão Instaladora
do Instituto Politécnico da Guarda

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES COM MATRIZES DOS COEFICIENTES NÃO SIMÉTRICOS POR MÉTODOS SEMI-ITERATIVOS

Fernando Pires Valente*

Introdução

Em 1952 Hestenes e Stiefel propuseram um método novo para a resolução de sistemas lineares de equações algébricas da forma $A\underline{x}=\underline{b}$ - o método dos Gradientes Conjugados - em que A é uma matriz de (nxn) simétrica positiva definida.

Trata-se de um método extremamente elegante, que apresenta como uma das suas propriedades fundamentais, o facto de que, na ausência de erros de arredondamento, a solução é obtida no máximo de n iterações. Uma outra vantagem importante é o facto de não ser necessário memorizar a matriz A inteira, pois em cada passo de iteração é apenas necessário realizar o cálculo do produto $A\underline{z}$ para um dado vector $\underline{z}$. Pode-se também referir que ao contrário de outros métodos iterativos o método dos GC não necessita de qualquer estimação de parâmetros.

Infelizmente, na sua aplicação prática, algumas das suas propriedades numéricas não se revelaram exactamente iguais às previsões teóricas.

Com efeito e por exemplo, verificou-se que mesmo para sistemas de dimensão não muito grande ($n \leq 100$) o algoritmo do método dos GC não obtinha necessariamente a solução em n iterações.

Por outro lado a imposição de a matriz ser simétrica e positiva definida, limita o campo de aplicabilidade do método anterior.

* Professor Coordenador da ESTG.

Desenvolveram-se assim, posteriormente, outros tipos de métodos com base no método dos **Gradientes Conjugados**, de aplicação mais lata, mas com os mesmos fundamentos teóricos essenciais.

No presente trabalho faz-se a apresentação e a fundamentação de um desses tipos de métodos - Métodos Descida - bem assim como um exemplo da sua aplicação concreta.

Fundamento Teórico

Seja o sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ em que A é uma matriz não simétirca de ordem n, mas com *parte simétrica positiva definida*.

(Dada uma matriz $A(nxn)$ define-se parte simétrica de A por

$$M = \frac{A + A^t}{2} \quad)$$

Um algoritmo genérico para as diferentes variantes do método que se apresenta é o seguinte:

Escolher $\underline{x}_0$
$\underline{r}_0 = \underline{b} - A\,\underline{x}_0$
Fazer $\underline{p}_0 = \underline{r}_0$; $k = 0$
Enquanto $\underline{r}_k \neq 0$ fazer $k = 0,1,2,...$
$\alpha_k = (\underline{r}_k.A\underline{p}_k) / (A\underline{p}_k.A\underline{p}_k)$
(1) $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \alpha_k \underline{p}_k$
$\underline{r}_{k+1} = \underline{r}_k - \alpha_k A\underline{p}_k$
Calcular $\underline{p}_{k+1}$
Fim
$\underline{x} = \underline{x}_{k+1}$

A escolha da expressão de α_k no algoritmo anterior minimiza $||\underline{r}_{k+1}||_2 = ||\underline{b} - A(\underline{x}_k+\alpha\underline{p}_k)||_2$ como função de α, de modo que a norma Euclideana do resíduo decresça em cada iteração.

As diferentes variantes apresentam diferenças na técnica, que em cada uma delas é utilizada para determinar a nova direcção do vector $\underline{p}_{k+1}$.

Uma escolha adequada para $\underline{p}_{k+1}$ será aquela em que se obtenha um decréscimo acentuado da norma do resíduo $||\underline{r}_{k+1}||_2$ e que não necessite de um cálculo muito elaborado para a sua determinação.

No caso de A ser simétrica e definida positiva, tal vector pode obter-se pela relação de recorrência:

(2a) $$\underline{p}_{k+1} = \underline{r}_{k+1} + \beta_k \underline{p}_k$$

em que

(2b) $$\beta_k = \frac{(A\underline{r}_{k-1}, A\underline{p}_k)}{(A\underline{p}_k, A\underline{p}_k)}$$

Obtem-se assim um algoritmo equivalente a uma variante do método dos Gradientes Conjugados conhecida pelo "Método dos Resíduos Conjugados" (RC).

Os vectores assim obtidos têm direcções ortogonais em relação a A^tA, ou seja,

(3) $$(A\underline{p}_i, A\underline{p}_j) = 0 \qquad \text{para} \qquad i \neq j$$

e $\underline{x}_{k+1}$ minimiza o funcional

$$E(\underline{v}) = \| \underline{b} - A\underline{v} \|_2$$

sobre o espaço linear resultante da expansão $\underline{x}_0 + L(\underline{p}_0, \underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_k)$.

No caso de A ser não simétrica e o algoritmo definido por (1) e (2) ser aplicado ao sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ então a relação de ortogonalidade traduzida por (3) não se verifica em geral.

Pode, no entanto gerar-se um conjunto de direcções A^tA-ortogonais, utilizando o conjunto de vectores

$$\{ \underline{p}_i \}_{i=0}^{k}$$

para o cálculo de $\underline{p}_k$.

(4a) $$\underline{p}_{k+1} = \underline{r}_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(k)} \underline{p}_i$$

em que

(4b) $$\beta_i^{(k)} = - \frac{(A\underline{r}_{k+1}, A\underline{p}_i)}{(A\underline{p}_i, A\underline{p}_i)} \qquad i \leq k$$

Obtem-se assim uma outa variante do método dos Gradientes Conjugados denominada "Método dos Resíduos Conjugados Generalizado" (RCG).

A iteração $\underline{x}_{k+1}$ obtida através do algoritmo (1) e das expressões (4) minimiza o funcional $E(\underline{y})$ no Espaço Linear resultante da expansão de

$$\underline{x}_o + L\{\underline{p}_o, \ldots, \underline{p}_k\}$$

No caso de não existirem erros de arredondamento, o método anterior (RCG) conduz à solução exacta do sistema num máximo de n iterações.

A desvantagem principal do método dos Resíduos Conjugados Generalizado, prende-se com o facto de as suas necessidades em capacidade de armazenamento e trabalho computacional se poderem tornar demasiado grandes para valores de n elevados.

Surgiu assim a ideia de considerar uma nova versão, que resulta de uma ligeira alteração no método anterior, e que é muito menos exigente em termos do número de operações e capacidade de armazenamento por iteração.

Essa nova versão foi apresentada por Vinsome (1976) e consiste em gerar os vectores $\underline{p}_{k+1}$ de modo a que em vez de serem A^tA-ortogonais em relação a todos os vectores precedentes

$$\{\underline{p}_i\}_{i=o}^{k}$$

o sejam apenas em relação aos últimos (j≥0) vectores

$$\{\underline{p}_i\}_{i=k-j+1}^{k}$$

$$(5) \qquad \underline{p}_{k+1} = \underline{r}_{k+1} + \sum_{i=k-j+1}^{k} \beta_i^{(k)} \underline{p}_i$$

em que os $\beta_i^{(k)}$ para $i=k-j+1,\ldots,k$ são definidos por (4b).

O método anterior denomina-se "Orthomin(j)" e em cada iteração necessita apenas de preservar j direcções.

Tanto o método dos RCG, como o Orthomin(j) para j≥1 são equivalentes ao método dos Resíduos Conjugados (RC) quando a matriz A é simétrica e definida positiva.

Uma outra alternativa para obter uma nova versão é reiniciar periodicamente o método dos RCG: cada (j+1) iterações, a iteração corrente $\underline{x}_{i(j+1)}$ é considerada como um novo valor de partida. Neste caso o índice i conta o número de reinícios.

Para esta versão as necessidades, em termos de espaço de armazenamento em memória, são idênticas às de "Orthomin(j)", uma vez que no máximo é necessário guardar j vectores.

Quanto aos custos em termos computacionais (número de operações) estes são menores, na medida em que, em média, se utilizam menos que j vectores em cada iteração, no cálculo de $\underline{p}_{j+1}$.

A esta versão é habitual chamar-se "Método dos Resíduos Conjugados Generalizado(j)", RCG(j).

No caso particular de j=0, os dois métodos, Orthomin(j) e RCG(j) são idênticos, verificando-se:

(6) $$\underline{p}_{k+1} = \underline{r}_{k+1}$$

Esta última equação traduz um novo método denominado "Método do Mínimo Residual" (MR) que necessita de recursos computacionais muito reduzidos. No caso de A ser simétrica, o método anterior é semelhante ao método da maior inclinação referido em [3].

Convergência

Apresentam-se a seguir alguns teoremas relacionados com as propriedades de convergência dos métodos apresentados.

Um primeiro teorema permite estabelecer um conjunto de relações que se verificam entre os vectores gerados no método RCG.

Teorema 1:

Se $\{\underline{x}_i\}$ e $\{\underline{p}_i\}$ são os vectores obtidos na iteração de ordem i, no método dos RCG, na resolução do sistema $A\underline{x}=\underline{b}$, então verificam-se as seguintes relações:

(6a) $(A\underline{p}_i, A\underline{p}_j) = 0$, se $i \neq j$

(6b) $(\underline{r}_i, A\underline{p}_j) = 0$, se $i > j$

(6c) $(\underline{r}_i, A\underline{p}_j) = (\underline{r}_i, A\underline{r}_i)$

(6d) $(\underline{r}_i, A\underline{r}_j) = 0$, se $i > j$

(6e) $(\underline{r}_j, A\underline{p}_i) = (\underline{r}_0, A\underline{p}_i)$, se $i \geq j$

(6f) $L\{\underline{p}_0, \ldots, \underline{p}_i\} = L\{\underline{p}_0, A\underline{p}_0, \ldots, A^i\underline{p}_0\} = L\{\underline{r}_0, \ldots, \underline{r}_i\}$

(6g) Se $\underline{r}_i \neq 0$ então $\underline{p}_i \neq 0$

(6h) $\underline{x}_{i+1}$ minimiza $E(\underline{v}) = \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2$ no Espaço que resulta da expansão linear de

$$\underline{x}_0 + L\{\underline{p}_0, \ldots, \underline{p}_i\}$$

Demonstração:

(6a) A determinação dos vectores $\{\underline{p}_i\}$ é feita de modo a que se verifique esta relação.

(6b) Esta relação pode demonstrar-se por indução.

Verifica-se para $i=0$. Admitindo que se verifica para $i \leq k$ e utilizando a relação

$$\underline{r}_{k-1} = \underline{r}_k - \alpha_k A\underline{p}_k$$

do algoritmo (1) obtem-se, realizando a multiplicação interna por $A\underline{p}_j$,

(7) $$(\underline{r}_{k+1}, A\underline{p}_j) = (\underline{r}_k, A\underline{p}_j) - \alpha\,(A\underline{p}_k, A\underline{p}_j)$$

Se $j<k$, os termos do segundo membro pela hipótese e por (6a) são nulos. Se $j=k$, o segundo membro é igual a zero pela definição de α_k.

Assim, a relação (6b) verifica-se para $i=k+1$.

(6c) Realizando a multiplicação da expressão (4a) por A e em seguida o produto interno por $\underline{r}_k$ obtem-se:

$$(\underline{r}_k, A\underline{p}_k) = (\underline{r}_k, A\underline{r}_k) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i^{(k-1)} (\underline{r}_k, A\underline{p}_i) = (\underline{r}_k, A\underline{r}_k)$$

devido a todos os membros do somatório serem nulos pela relação (6b).

(6d) Escrevendo a equação (4a) na forma

$$\underline{r}_j = \underline{p}_j - \sum_{k=0}^{j-1} \beta_k^{(j-1)} \underline{p}_k$$

multiplicando por A, e em seguida realizando o produto interno por $\underline{r}_i$ $(i>j)$, obtem-se,

$$(\underline{r}_i, A\underline{r}_j) = (\underline{r}_i, A\underline{p}_j) - \sum_{k=0}^{j-1} \beta_k^{(j-1)} (\underline{r}_j, A\underline{p}_k) = 0$$

devido a (6b).

(6e) Esta relação prova-se por indução em i para $i \leq j$.

Verifica-se para $i=0$.
Suponha-se que se verifica $i=k<j$.
Utilizando (7) tem-se:

$$(\underline{r}_{k+1},A\underline{p}_j) = (\underline{r}_j,A\underline{p}_j) - \alpha_k (A\underline{p}_k,A\underline{p}_j) = (\underline{r}_0,A\underline{p}_j)$$

pela hipótese e por (6a).

(6f) Também esta relação se prova por indução em i.

Os três espaços são idênticos para $i=0$.
Admita-se que são idênticos para $i \leq k$.
Então

$$\{\underline{p}_j\}_{j=0}^{k} \subset L\{\underline{r}_0,\ldots,\underline{r}_{k+1}\}$$

mas tendo em atenção (4a)

$$L\{\underline{p}_0,\ldots,\underline{p}_{k+1}\}$$

é um subespaço de

$$L\{\underline{r}_0,\ldots,\underline{r}_{k+1}\} .$$

A relação (6a) permite concluir que os vectores

$$\{\underline{p}_j\}_{j=0}^{k+1}$$

são linearmente independentes e portanto a dimensão de $L\{\underline{r}_0,\ldots,\underline{r}_{k+1}\}$ é maior ou igual a $k+1$, o que implica que

$$\{\underline{r}_j\}_{j=0}^{k+1}$$

sejam linearmente independentes e

$$L\{\underline{p}_0,\ldots,\underline{p}_{k+1}\} = L\{\underline{r}_0,\ldots,\underline{r}_{k+1}\} .$$

Do mesmo modo, a partir de

$$\underline{r}_{k+1} = \underline{r}_k - \alpha_k A\underline{p}_k \qquad \text{(Algoritmo 1)}$$

tem-se

$$\underline{p}_{k+1} = \underline{r}_k - \alpha_k A\underline{p}_k + \sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(k)} \underline{p}_i$$

Pela hipótese de indução

$$\underline{r}_k \ , \ A\underline{p}_k \ \text{e} \ \{\underline{p}_i\}_{i=0}^{k} \in L\{\underline{p}_0,\ldots,A\underline{p}_0,\ldots A\underline{p}^{k+1}\,\underline{p}_0\} .$$

E mais uma vez os dois subespaços são idênticos, já que os vectores $\{\underline{p}_i\}$ são linearmente independentes.

(6g) Esta relação é consequência do facto de a parte simétrica M da matriz A ser definida positiva.

Se $\underline{r}_i \neq 0$, então por (6c)

$$(\underline{r}_i,A\underline{p}_i) = (\underline{r}_i,A\underline{r}_i) = (\underline{r}_i,M\underline{r}_i) > 0$$

verificando-se $(\underline{r}_i,A\underline{p}_i) \neq 0$ e portanto $\underline{p}_i \neq 0$.

(6h) Sendo

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k} \alpha_k \, \underline{p}_k$$

tem-se que $E(\underline{x}_{k+1})^2$ é um funcional quadrático em $\underline{\alpha}=(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)^t$.

Com efeito, utilizando (6a) para simplificar o termo quadrático obtem-se:

$$E(\underline{x}_{k+1})^2 = \left|\left|\underline{r}_0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, A\underline{p}_i\right|\right|_2^2 = (\underline{r}_0,\underline{r}_0) - 2 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, (\underline{r}_0,A\underline{p}_i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2 \, (A\underline{p}_i,A\underline{p}_i)$$

e portanto $E(\underline{v})$ é minimizado em $\underline{x}_0 + L\{\underline{p}_0,\ldots,\underline{p}_k\}$ quando

$$\alpha_i = \frac{(\underline{r}_0,A\underline{p}_i)}{(A\underline{p}_i,A\underline{p}_i)} = \frac{(\underline{r}_i,A\underline{p}_i)}{(A\underline{p}_i,A\underline{p}_i)}$$

pela relação (6e).

Um segundo Teorema importante que traduz uma das características básicas do método dos RCG é o seguinte:

Teorema 2:

O método dos Resíduos Conjugados Generalizado conduz à solução exacta do sistema de equações lineares $A\underline{x}=\underline{b}$, sendo A uma matriz de (nxn) num máximo de n iterações.

Demonstração:

Se $\underline{r}_k=0$ para algum $k\leq n-1$, então $A\underline{x}_k=\underline{b}$ e verifica-se a afirmação do Teorema.

Se $\underline{r}_k\neq 0$ para todos os $k\leq n-1$, então $\underline{p}_k\neq 0$ para todos os $k\leq n-1$ devido a (6g).

Por (6a) os vectores

$$\{\underline{p}_k\}_{k=0}^{n-1}$$

são linearmente independentes e portanto a expansão linear

$$L\{\underline{p}_0,\ldots,\underline{p}_{n-1}\} = R^n .$$

Assim através de (6h) conclui-se que $\underline{x}_n$ minimiza o funcional E em R^n, ou seja $\underline{x}_n$ é a solução do sistema dado.

Em relação ao método "Orthomin(j)" podem estabelecer-se Teoremas de convergência idênticos aos estabelecidos para o método dos Resíduos Conjugados Generalizado.

Teorema 3:

Sendo $\{\underline{x}_i\}$, $\{\underline{r}_i\}$ e $\{\underline{p}_i\}$ as iterações de ordem i geradas pelo método Orthomin(j), verificam-se as seguintes relações:

(8a) $(A\underline{p}_i,A\underline{p}_j) = 0$, $j=i-k,\ldots,i-1$ $i\geq k$

(8b) $(\underline{r}_i,A\underline{p}_j) = 0$, $j=i-k-1,\ldots,i-1$ $i\geq k+1$

(8c) $(\underline{r}_i,A\underline{p}_i) = (\underline{r}_i,A\underline{r}_i)$

(8d) $(\underline{r}_i,A\underline{r}_{i-1}) = 0$

(8e) $(\underline{r}_j,A\underline{p}_i) = (\underline{r}_{i-k},A\underline{p}_i)$, $j=i-k,\ldots,i$ $i\geq k$

(8f) Se $\underline{r}_i\neq 0$, então $\underline{p}_i\neq 0$

(8g) Para $i\geq k$, $\underline{x}_{i+1}$ minimiza $E(\underline{v})$ no espaço

$$\underline{x}_{i-k} + L\{\underline{p}_{i-k},\ldots,\underline{p}_i\}$$

Demonstração:

Idêntica à do Teorema 1.

Por último refere-se um outro Teorema que garante a convergência do método Orthomin(j) para $k>0$.

A sua demonstração implica a necessidade de provar, em primeiro lugar, dois resultados auxiliares, pelo que não se apresentará aqui. Pode no entanto ser consultada em [2] ou [9].

Teorema 4:

Se $\{\underline{r}_k\}$ é a sequência dos resíduos originados por qualquer um dos métodos Orthomin(j), RCG, RCG(j) ou MR, na resolução do sistema $A\underline{x}=\underline{b}$, então:

$$(9) \qquad ||\underline{r}_k||_2 \le \left[1 - \frac{\lambda_1(M)^2}{\lambda_n(A^tA)} \right]^{k/2} ||\underline{r}_0||_2$$

$$(10) \qquad ||\underline{r}_k||_2 \le \left[1 - \frac{\lambda_1(M)2}{\lambda_1(M)\,\lambda_n(M) + \rho(R)^2} \right]^{k/2} ||\underline{r}_0||_2$$

(λ_1 - Valor próprio da matriz com menor valor absoluto

λ_n - Valor próprio da matriz com maior valor absoluto

r - Raio espectral da matriz $|\lambda_n|$

$$M = \frac{A + A^t}{2} \qquad\qquad R = \frac{A - A^t}{2}$$)

Como se verifica, o Teorema 4 aplica-se também aos métodos RCG, RCG(j) e MR, pelo que fica concluída a análise da convergência dos métodos iterativos do tipo descida referidos neste trabalho.

Exemplo de aplicação

Fez-se o desenvolvimento de um programa em FORTRAN77 que implementa o algoritmo (1) com as expressões (4b) e (5) em que se utilizaram três termos nesta última expressão.

O algoritmo correspondente em FORTRAN simplificado é o que se apresenta a seguir.

```
Subroutine Descida(x,r,p,n)
Dimension x(*,*),r(*,*),p(*,*)
k=0
x(k,*) = 0
p(k,*) = p(k+1,*) = 0
r(k+2,*) = p(k+2,*) = b - A*x(k,*)
do  100  k=2,...,n
    α = (r(k,*)*A*p1(k,*))/(A*p1(k,*)*A*p1(k,*))
    x(k+1,*) = x(k,*) + α*p1(k,*)
    r(k+1,*) = r(k,*) - α*A*p1(k,*)
    β0 = -(A*r(k+1,*)*A*p(k-2,*))/(A*p(k-2,*)*A*p(k-2,*))
    β1 = -(A*r(k+1,*)*A*p(k-1,*))/(A*p(k-1,*)*A*p(k-1,*))
    β2 = -(A*r(k+1,*)*A*p(k,*))/(A*p(k,*)*A*p(k,*))
    p(k+1,*) = r(k+1,*) + β0*p(k-2,*) + β1*p(k-1,*) + β2*
                    *p(k,*)
    p(k,*) = p(k-1,*)
100  continue
  x = x(k+1,*)
end
```

Aplicou-se o programa desenvolvido à resolução dos sistemas lineares de equações resultantes da discretização pelo método dos elementos de fronteira de dois problemas potenciais, bidimensionais, correspondentes em termos físicos, a um problema de transmissão de calor e a um problema de escoamento de um fluido numa conduta com um obstáculo.

Em ambos os casos se utilizou uma discretização da fronteira em 64 elementos lineares, pelo que os sistemas de equações resultantes apresentam uma matriz A dos coeficientes de dimensão (64 x 64).

Tendo em atenção o facto de que no método dos elementos de fronteira, as matrizes dos coeficientes dos sistemas de equações resultantes da discretização, são densas, mal condicionadas e não simétricas, houve a necessidade de normalizar o sistema obtido em cada um dos casos, o que foi conseguido realizando o produto de ambos os termos pela transposta da matriz dos coeficientes, isto é,

$$A^t A \underline{x} = A^t \underline{b}$$

Deste modo, obteve-se uma matriz $\hat{A}$ dos coeficientes do novo sistema $\hat{A}\underline{x}=\hat{\underline{b}}$, equivalente ao anterior, com parte simétrica positiva ($\hat{A}$ é de resto simétrica), a qual verifica as condições de convergência dos métodos de tipo descida referidas no presente trabalho.

Os resultados obtidos para os dois problemas referidos foram, para diferentes números de iterações, os que se apresentam nas tabelas seguintes, em que figuram os resultados da comparação das soluções obtidas pelo método de tipo descida, com as soluções obtidas por um método exacto (eliminação de Gauss), o que para matrizes com a dimensão das dos exemplos utilizados ainda é possivel sem demasiados custos computacionais, e constitui uma medida fácil da sua eficiência. Tal já não aconteceria para matrizes com dimensão da ordem das centenas, em que, a aplicação do método exacto como meio de comparação teria um custo computacional elevado.

Nº iterações	Exemplo 1	Exemplo 2
10	0.1733010+01	0.6249785+00
20	0.8111504+00	0.4719607+00
30	0.4482580+00	0.4079847+00
40	0.2420235+00	0.3167376+00
50	0.1870856+00	0.2627034+00
60	0.1750995+00	0.2003113+00
70	0.1716141+00	0.1408347+00
80	0.1645098+00	0.9487598-01
90	0.1360238+00	0.6973169-01
100	0.9334885-01	0.5886275-01
120	0.6478368-01	0.3753655-01
140	0.4845408-01	0.2526970-01
160	0.3877939-01	0.1971291-01
180	0.2572670-01	0.1983966-01
200	0.2489528-01	
240	0.2067777-01	
280	0.2050940-01	

A comparação referida acima, é efectuada através da medição do erro entre os dois tipos de métodos por meio de uma norma, definida pela expressão

$$||e|| = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\underline{x}_i - \underline{x}_i|}}{n}$$

Pode verificar-se que para qualquer um dos problemas analisados a taxa de convergência é elevada, e que, ao fim de **n** iterações (**n** ordem da matriz A dos coeficientes do sistema de equações) o erro do método semi-iterativo em relação ao método exacto já diminuiu de um factor assinalável.

Não se atinge a solução exacta em **n** iterações, devido a apenas se estarem a utilizar 3 termos na expressão (5), sendo portanto necessário, um maior número de iterações para atingir tal objectivo.

No primeiro exemplo a solução exacta é atingida ao fim de cerca de 240 iterações, pois o erro que se verifica então, tem já a ver com o limite da capacidade de cálculo (em termos de erros de arredondamento) do programa utilizado, e não com o método em si.

Em relação ao segundo exemplo, a solução exacta é conseguida ao fim de 160 iterações, tendo o erro que se verifica então a mesma origem.

Refira-se que nos cálculos efectuados, se utilizou apenas precisão simples, uma vez que os resultados obtidos evidenciam claramente os objectivos pretendidos, pelo não houve necessidade de recorrer à dupla precisão.

Conclusão

Fez-se a apresentação, análise e aplicação de um tipo de métodos semi-iterativos de resolução de sistemas de equações lineares, de desenvolvimento recente e que aparenta ter grandes potencialidades para a resolução de sistemas de grande dimensão, em que a solução por métodos exactos tem custos computacionais elevados e apresenta problemas em termos da propagação de erros de arredondamento.

Os métodos estudados, que têm por base o método dos Gradientes Conjugados, são aplicáveis a matrizes com partes simétricas definidas positivas e são de aplicabilidade relativamente fácil, quer na resolução de equações diferenciais parciais pelo método dos elementos de fronteira (como se verifica pelos exemplos apresentados), quer na resolução de equações diferenciais parciais pelos métodos dos elementos finitos e das diferenças finitas.

Bibliografia

1. Brebbia, C. A. (1984)
"The Boundary Element Method for Engineers"
Pentech Press, Londres
2. Eisenstat, S. C. ; Elman, H. C. e Schultz, M. H. (1983)
"Variational Iterative Methods for Nonsymmetric Systems of Linear Equations"
SIAM, J. of Numerical Analysis, 20(2), pp. 345-357
3. Golub, G. H. e Van Loan, C. F. (1990)
"Matrix Computations"
The John Hopkins University Press, Baltimore
4. Jackson, C. P. e Robinson, P. C. (1985)
"Conjugate Gradient Type Methods and Preconditioning"
J. Comp. Applied Mathematics, 24, pp. 77-87
5. Kane, J. H. ; Keyes, D. E. e Guru Prasad, K. (1991)
"Iterative Solution Techniques in Boundary Element Analysis"
Int. J. Numerical Methods in Engineering, 31, pp. 1511-1536
6. Saad, Y. e Schultz, M. H. (1986)
"GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linea Systems"
SIAM, J. Sci. Stat. Comput., 7(3), pp 856-869
7. Sonneveld, P. (1984)
"CGS, a Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems"
Relatório do Departamento de Matemática e Informática da Universidade de DELFT
8. Valente, F. P. (1992)
"O Método dos Gradientes Conjugados Aplicado aos Elementos de Fronteira"
Educação e Tecnologia, IPG, 9, pp. 115-128
9. Valente, F. P. (1992)
"Metodos Iterativos de Resolução de Sistemas de Equações Lineares no Método dos Elemento de Fronteira"
Dissertação Apresentada para a Obtenção da Categoria de Prof. Coordenador em Matemátic Aplicada, IPG