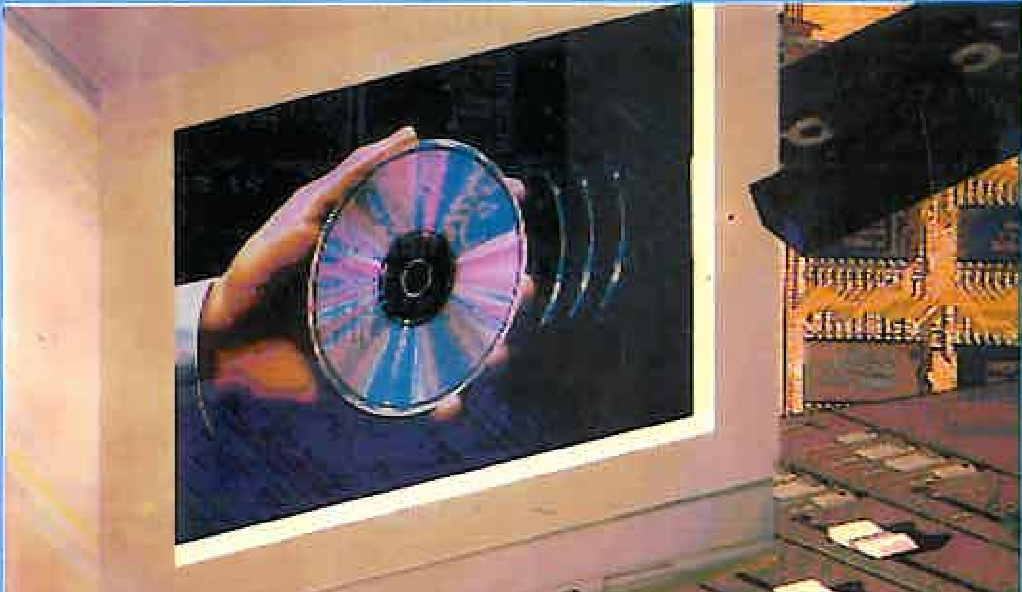
EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA



Revista do Instituto Politécnico da Guarda

EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA

Propriedade
Instituto Politécnico da Guarda

Director
Álvaro Bento Leal

Redacção
Serviços Centrais do I.P.G.
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro nº 50 * 6300 Guarda
Telef. (071) 222634 * Telecópia (071) 222690

Composição
Gabinete Editorial do I.P.G.

Execução Gráfica e Impressão
Secção de Reprografia do I.P.G.

Periodicidade
Semestral

Tiragem
1.000 ex.

Depósito Legal
nº 17.981/87

Capa: Grafismo de José Carlos Miranda

nº XVII * Fevereiro de 1996

Um contributo válido

A Revista "Educação e Tecnologia ", com esta edição, apresenta o seu décimo sétimo número, cumprindo a sua periodicidade.

Nesta breve nota introdutória entendi oportuno fazer referência às colaborações com que esta publicação tem contado; sobretudo ao apoio daqueles que optando pela carreira académica, aqui se formaram, a partir daqui desenvolveram a evolução lógica dessa mesma carreira e a este Instituto Politécnico estão a dar o seu próprio contributo, construindo assim um autêntico espírito de escola — que sempre defendi — assegurando, ainda a estabilidade do corpo docente das duas Escolas Superiores que, actualmente, integram o Instituto Politécnico da Guarda.

É importante não esquecer que a nova realidade resultante da publicação dos estatutos do Instituto Politécnico, bem como da Escola Superior de Educação e da Escola Superior de Tecnologia e Gestão, exige uma participação colectiva, um empenhamento diário, uma postura profissional e responsável que possa responder, cabalmente, às exigências actuais e aos desafios futuros.

Apostamos numa educação e num ensino com qualidade, apostamos no desenvolvimento desta região, certos de que estamos a dar o nosso contributo para o desenvolvimento do todo nacional. E esse contributo passa também pela divulgação de trabalhos de pesquisa e investigação, resultado da experiência profissional de cada um, e igualmente pela apresentação de trabalhos com carácter pedagógico ou informativo, dentro dos parâmetros e do espírito da nossa Revista, que continuará a ser um desafio semestral.

Álvaro Bento Leal
Presidente do IPG

Método de Ponto Interior para Programação Linear "Método da Função com Penalidade"

Maria Cecília dos Santos Rosa *

Resumo

O método proposto neste artigo é um método de ponto interior para Programação Linear desenvolvido por Clóvis Gonzaga designado por método da função com penalidade .

Vai fazer-se o estudo deste método, com vista à implementação computacional do mesmo, sem desenvolver o estudo teórico da complexidade do algoritmo.

O algoritmo foi programado no MATLAB e foi aplicado a alguns problemas particulares.

1 - Introdução

O primeiro método de resolução de problemas de Programação Linear largamente utilizado foi o proposto por Dantzig na década de quarenta, designado por método simplex.

Revista "Educação e Tecnologia" * Vol. XVII, Fevereiro de 1996

* Profª Adjunta na E.S.T.G.

O método simplex foi até há bem pouco tempo considerado como o mais poderoso dos métodos para a resolução de problemas de Programação Linear.

Os métodos de ponto interior aparecem posteriormente já na década de oitenta. Os métodos de ponto interior são essencialmente diferentes do método simplex pelo facto de envolverem o interior relativo do conjunto das soluções admissíveis. Os deslocamentos em direcção ao óptimo fazem-se sempre no interior do conjunto das soluções admissíveis e não seguem a rede de arestas que ligam os diferentes vértices do politopo admissível como faz o método simplex.

Na sequência de trabalhos de investigação sobre métodos de ponto interior surge o trabalho de Clóvis Gonzaga que desenvolveu alguns métodos de ponto interior, entre eles o chamado método da função com penalidade.

Considere-se o problema de Programação Linear na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(P)}$$

onde $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$ e $c \in R^n$. No que se segue vai-se supor que $m<n$ e que A tem característica m.

Supõe-se ainda que o conjunto das soluções admissíveis

$$S = \left\{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\right\}$$

é limitado e o seu interior relativo

$$S^0 = \left\{x \in R^n : Ax = b, x > 0\right\}$$

é não vazio.

O espaço nulo da matriz A, $\mathrm{N}(A)$, é definido por

$$\mathrm{N}(A) = \left\{x \in R^n : \ Ax = 0\right\}$$

Seja $P_A = I - A^T(AA^T)^{-1}A$ a matriz de projecção no espaço nulo $\mathrm{N}(A)$.

Dado um ponto $x \in R_+^n$, define-se operação de escala como sendo uma mudança de coordenadas que transforma o ponto x no ponto y da seguinte forma:

$y = D^{-1}x$, onde D é uma matriz diagonal estritamente positiva.

Em particular se $D = \text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ou seja $D = X$ então $D^{-1}x = e$ com $e = [1 \;\; 1 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; 1]^T$ e o problema de Programação Linear (P) transforma-se no seguinte problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} &\min \bar{c}^T y \\ &\text{s.a } \bar{A}\, y = b \\ &\qquad y \geq 0 \end{aligned} \qquad (\bar{P})$$

onde $\bar{A} = AX$ e $\bar{c} = Xc$ que é problema equivalente ao problema (P).

Represente-se por $\bar{S}$ o conjunto das soluções admissíveis para o problema $(\bar{P})$ e por $\bar{S}^0$ o seu interior relativo .

Então $P_{\bar{A}} = I - \bar{A}^T (AX^2A^T)^{-1}\bar{A}$.

2. Método da função com penalidade

Este método destina-se à resolução de problemas de Programação Linear com a forma do problema (P). Neste método a solução admissível inicial, é um ponto interior do conjunto das soluções admissíveis e os deslocamentos em direcção ao óptimo fazem-se sempre no interior do conjunto das soluções admissíveis.

A função com penalidade é definida para cada valor do parâmetro $\alpha \in$ R por

$$x \in R_+^n \longrightarrow f_\alpha(x) = \alpha\, c^T x + p(x)$$

onde $p(x)$ é a função barreira definida por

$$x \in R_+^n \longrightarrow p(x) \ = - \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

É fácil provar que a função f_α é convexa e que a operação de escala definida anteriormente não afecta a variação da função com penalidade.

2.1. Teoria do método

A descrição do método baseia-se no caminho central.

A trajectória central é o conjunto de pontos centrais definidos, para cada $\alpha \geq 0$ por

$$x(\alpha) = \arg\min\{f_\alpha(x): Ax = b, x > 0\}.$$

Dado $\alpha > 0$, o problema com penalidade associado ao problema de Programação Linear (P) é

$$\min_{x \in S^0} f_\alpha(x)$$

Então , o problema de Programação Linear (P) pode ser resolvido por uma sequência de problemas desta forma , em que para cada valor do parâmetro $\alpha > 0$, se determina um mínimo para f_α ou seja, um ponto central $x(\alpha)$.

Na prática não se determinam pontos centrais exactos mas sim uma sequência de pontos que estão perto do caminho central, usando um critério de proximidade ao caminho central .

É então necessário definir um critério que decida quando é que um ponto x está "perto" do ponto central $x(\alpha)$.

Dado $\alpha > 0$ e $x \in S^0$, a direcção de Newton-Raphson para a função f_α é representada por $h_N(x, \alpha)$.

Lema. A direcção de Newton-Raphson $h_N(x,\alpha)$ é dada por:

i) $h_N(e,\alpha) = -P_A \nabla f_\alpha(e) = -P_A(\alpha c - e)$

ii) $h_N(x,\alpha) = -X\, P_{AX} X \nabla f_\alpha(x) = -X\, P_{AX}(\alpha X c - e)$

Dem: [4]

Definição. Dado $\alpha > 0$ e $x \in S^0$, a proximidade de x em relação a $x(\alpha)$ é dada por $\delta(x, \alpha) = \left\| X^{-1} h_N(x\, ,\, \alpha) \right\|$.

O ponto x será considerado *quase central*, ou seja x está perto do caminho central, se $\delta(x, \alpha)$ for pequeno, onde pequeno significa normalmente $\delta(x, \alpha) \leq 0.1$.

A direcção de Newton-Raphson é independente da escala no sentido de que o ponto obtido por um passo Newton-Raphson não depende do sistema de coordenadas usado no seu cálculo.

No ponto e, a direcção de Newton-Raphson coincide com a direcção do gradiente projectado.

2.2. Algoritmo

Para a implementação computacional do método da função com penalidade uma questão que se põe é a determinação de uma solução inicial x^0 que pertença ao interior do conjunto das soluções admissíveis do problema (P).

A determinação desta solução pode fazer-se modificando o problema de Programação Linear original (P), com a introdução de uma variável artificial u, de modo a obter-se o problema de Programação Linear:

$$\min\ c^T x + \text{Mu}$$

$$\text{s.a}\quad \left[A\ ,\ b - Ax^0\right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = b \qquad \text{(PM)}$$

$$x, u \geq 0$$

onde M é uma constante positiva, suficientemente grande e x^0 corresponde a um n-uplo de componentes não negativas arbitrárias.

É claro que o problema (PM) admite como solução admissível o ponto de R^{n+1} da forma $\left[x^0\ 1\right]^T$, podendo-se adoptar para x^0 o ponto e cujas componentes são todas iguais à unidade.

É óbvio que x é uma solução óptima para (P) se e só se $(x,0)$ é uma solução óptima para (PM).

A constante M deve ser escolhida suficientemente grande, de modo a garantir que a solução óptima do programa linear (PM) apresente com valor nulo a componente relativa à variável artificial u.

O algoritmo para o método da função com penalidade é composto por dois ciclos. Um ciclo principal que actualiza o valor do parâmetro de penalidade da seguinte forma:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k(1 + \theta), \text{ com } \theta = \frac{\beta}{\sqrt{n}},\ \beta > 0 \text{ e } k = 0,$$

1, 2, ...

Um ciclo interno que executa iterações Newton-Raphson para determinar um mínimo aproximado para a função com penalidade.

Este ciclo utiliza em cada iteração o critério de proximidade em relação ao caminho central definido anteriormente.

O ciclo principal pára numa dada iteração k do algoritmo, quando $\delta(x^k, \alpha_k) \leq 0.1$ e $\alpha_k \geq 1.2 \times n \times 2^L$, onde L representa o " tamanho " dos dados de entrada do problema de Programação Linear (P) (número de "bits" necessários para armazenar os coeficientes A, b e c).

Algoritmo (implementável): dado $\theta = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$ com $\beta > 0$ e

dados $x^0 \in S^0$ e $\alpha_0 \geq 0$ tais que $\delta\left(x^0, \alpha_0\right) \leq 0.1$.

$k := 0$

Repetir (ciclo principal)

$\alpha_{k+1} := \alpha_k (1 + \theta)$

Repetir (ciclo interno)

Definir escala: $\overline{A} = AX_k$, $\overline{c} = X_k c$

Calcular os vectores $Pc = P_{\overline{A}}\overline{c}$ e $Pe = P_{\overline{A}} e$

Direcção de Newton-Raphson :

$h = \overline{h}_N (e, \alpha) = -\alpha\, P_{\overline{A}}\overline{c} + P_{\overline{A}} e$

Pesquisa linear: determinar uma solução aproximada para

$\overline{\lambda} = \arg\min\left\{ f_\alpha (e + \lambda h), \lambda > 0 \text{ e } e + \lambda h > 0 \right\}$

$y = e + \overline{\lambda} h$

$x^{k+1} = X_k y$

$k := k + 1$

até que $\|h\| \leq 0.1$

até que $\alpha_k \geq 1.2\ n\ 2^L$

A operação de escala vai ter um papel importante na execução das operações no ciclo interno. Assim, quando se faz a implementação computacional do método da função com penalidade, as operações não são executadas no espaço original S^0 mas sim em $\overline{S}^0$. Efectua-se uma operação de escala por x^k obtendo-se um problema da forma ($\overline{P}$). No problema ($\overline{P}$) o ponto e é admissível e corresponde a x^k no sistema de coordenadas original.

2.3.Experimentação

O algoritmo descrito anteriormente foi programado no MATLAB.O algoritmo correspondente em MATLAB é o que se apresenta a seguir:

```
% Programa que aplica o método da função com penalidade
%descrito em
% Clóvis Gonzaga, Large step path-following methods for Linear
% Progamming: part I, SIAM journal on optimization, vol.1,
%Maio de 1991.
% Resolve um problema de programação Linear da forma

%           min c'x
%          s.a Ax <= b
%               x >= 0

%      Inicialização de variáveis
e = ones(n+m+1,1);
x = e;
I = eye(n+m+1);
%      matriz do problema modificado
A = [A b-A*ones(n+m,1)];
%      vector da função objectivo do problema modificado
c = [c' M]';
%      atribuição dos parâmetros
alfa = 1000;
teta = 1000;
erro_maximo = 0.0001;
%      Ciclo principal que faz a actualização do parâmetro alfa
while alfa < (1.2*(n+m)/erro_maximo),
     delta = 10;
%      Ciclo interno que minimiza a função com penalidade
       while (delta > 1),
           X = diag(x);
%      matriz de projecção
           P = I-X*A'*inv(A*X^2*A')*A*X;
           cbarra = x.*c;
           Pc = P*cbarra;
           Pe = P*e;
%      direcção de Newton Raphson
          h= -alfa * Pc + Pe;
          delta=norm (X * h);
          if delta > 1,
% Subrotina que determina o valor de lambda

             fblamb
```

```
%       minimo da função com penalidade
                y = e + lambda*h;
                x = x.*y;
              end % if
          end % while do ciclo interno
%       actualização do parâmetro alfa
alfa = (1 + teta)*alfa;
end % while do ciclo principal
 % output result
valor = c'*x
```

```
% Subrotina "fblamb" do programa para o método da função
com %penalidade
% que faz a pesquisa linear,isto é, determina o valor de lambda
% usando o método numérico das bissecções sussecivas.


it = 0;
amin = 0;
amax = 1/abs(min(h));
while it < 10,
        a = (amax+amin)/2;
        flinha = alfa*cbarra'*h;
         for i=1: n+m+1,
              flinha = flinha - h(i)/(1+a*h(i));
        end % for
        if flinha < 0,
             amin = a;
        else
             amax = a;
        end % if
        it = it + 1;
end % do while
lambda = (amax+amin)/2;
```

O programa foi testado com problemas de Programação Linear gerados aleatóriamente pelo processo descrito em [7] dos quais se conhece a solução.

Os resultados obtidos para os problemas referidos figuram na seguinte tabela:

m	n	iterações	$c^t x$
5	10	8	-6163
5	15	10	-15412
10	20	9	-51741
10	30	11	-27999
15	30	10	-86673
15	40	12	-113960
20	40	13	-144910
20	50	11	-186260

Nota: Foram usados os seguintes valores para os parâmetros: alfa=1000 e teta=1000

Pode verificar-se que para qualquer um dos problemas analisados se chegou à solução exacta do problema, sendo variável o número de iterações internas do algoritmo.

3. Conclusão

Fez-se a apresentação e aplicação de um método de ponto interior para Programação Linear desenvolvido recentemente por Clóvis Gonzaga. Este tipo de métodos têm-se apresentado como mais eficientes do ponto de vista computacional, principalmente na resolução de problemas de grandes dimensões, que o método simplex, permitindo atingir o óptimo mais depressa do que o método simplex.

O programa desenvolvido neste trabalho não foi testado para problemas de grandes dimensões pois o MATLAB apresenta restrições em termos de memória.

REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA

CARDOSO,D.M., *O método Simplex generalizado: Uma nova aproximação à Programação Linear*, Tese de Doutoramento, Aveiro 1992.

FIACCO,A. AND McCORMICK,G., *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley, New york, 1968.

GONZAGA,C., An algorithm for solving linear programming problems in $o(n^3L)$ operations, in Progress in Mathematical Programming - Interior Point and Related Methods, N. Megiddo, (ed.), Springer - Verlag, Berlin, 1989, Chap.1.

GONZAGA,C., Large step path-following methods for linear programming, Part I: Barrier function method, SIAM J Optim. , 1 (1991), pp. 268 - 279.

GONZAGA,C., Path following methods for linear programming, SIAM Review, 34 (1992), 2, pp. 167 - 224

KARMARKAR,N., A new polynomial time algorithm for linear programming, Combinatorica, 4 (1984), pp. 373 - 395.

ROSA,M. C., Métodos de ponto interior para programação linear,dissertação na área de optimização e controle da tese de Mestrado em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências do Porto (1994).