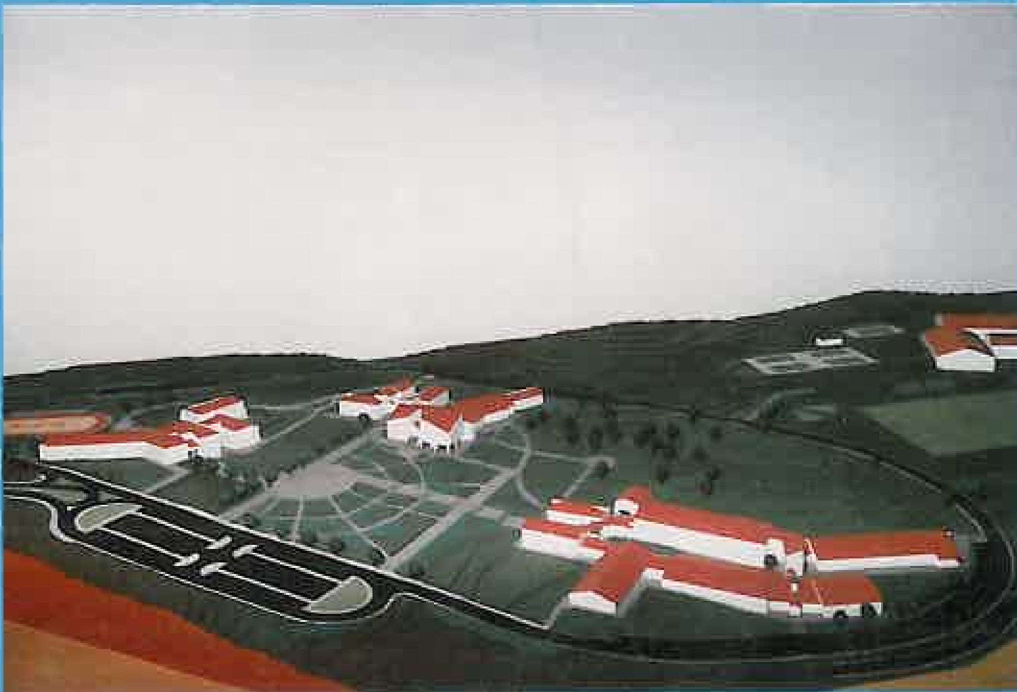
EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA



Revista do Instituto Politécnico da Guarda

"EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA"
Revista do Instituto Politecnico da Guarda

DIRECTOR: João Bento Raimundo

REDACÇÃO: Rua Comandante Salvador do Nascimento
Telef. 21634 6300 GUARDA

PROPRIEDADE: Instituto Politécnico da Guarda

EXECUÇÃO GRÁFICA: Secção de Reprografia do IPG

Depósito Legal N.º 17.891/87

Nº 5 / Setembro / 89

ABERTURA PARA O MUNDO ...

"Português que viva apenas para Portugal, como acho queria o Velho do Restelo, não tem significado algum nem vale a pena existir no mundo; temos de viver para o universo, ou seremos inúteis".

Agostinho da Silva

Sempre defendemos a formação integral do indivíduo. Tal significa, para nós, em termos globais, o crescimento perante conhecimentos gerais e específicos; o acordar das potencialidades de cada um; a afirmação do indivíduo perante ele próprio, em primeiro lugar, perante os outros e o mundo, depois; o, já tantas vezes referido, saber, saber fazer, saber ser; enfim, um caminhar efectivo para a realização e para a felicidade.

O presente número, o quinto, de "Educação e Tecnologia", enquanto "um espaço aberto", objectivo — génese da sua existência e da sua afirmação — na linha do que atrás referimos, inclui já a participação de professores de Instituições ligadas ao Instituto Politécnico da Guarda pelo Programa Erasmus. Isto constitui um sinal evidente da cooperação que, a vários níveis, há alguns meses atrás, foi acordada em protocolos com Bayonne, Brighton, Coventry, Créteil, Pau e Salamanca.

Este aprofundamento de relações entre instituições europeias de ensino superior veio favorecer a vivência do espírito comunitário e imprimir nos alunos a consciencialização do conceito da nova Europa da cultura e dos cidadãos.

Defendemos e prosseguimos um caminho de abertura para o mundo das coisas, das pessoas e do saber, numa perspectiva integradora em que a verdadeira dimensão do humano se procure, se veja e se consubstancie na efectiva comunhão do universal.

João Bento Raimundo

Presidente da C. I. do
Instituto Politécnico da Guarda

UMA ANÁLISE DO PROBLEMA DO PONTO FIXO DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Álvaro Bento Leal *

Resumo: Estabelecem-se condições para f(x), suficientes para a convergência da sucessão $x_n = f(x_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para $x_0 \in [c,d] \supset [a,b]$, onde [a,b] é um intervalo para o qual f(x) obedece às condições de validade do teorema do ponto fixo. Mostra-se a possibilidade de formulação do teorema do ponto fixo sem apelo a condições sobre f ' (x) e como resultado prova-se que a condição de diferenciabilidade de f(x) não é essencial na demonstração desse teorema na sua forma usual.

O problema do ponto fixo de funções reais de variável real, isto é, a definição das condições em que a sucessão

$$\{x_n\},\ x_n = f(x_{n-1}),\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{com} \quad x_n \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

converge para a solução α de $x = f(x)$

$$\alpha = f(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

é bem conhecido da Análise Numérica. Numerosos algoritmos numéricos são estabelecidos com base neste problema.

Em [1], H. Varandas analisa este problema, mas com o objectivo de estabelecer as condições de convergência da sucessão $\{x_n\}$ e não para a obtenção computacional da solução $x = f(x)$.

Se aparentemente o problema é idêntico, em termos de aplicação, surgem aspectos interessantes que solicitam uma análise algo distinta da que é conhecida no domínio da Análise Numérica.

---

* Prof. Coordenador do I.P.G.

Na Análise Numérica o problema central é a definição de um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, tal que para $x_0 \in [a,b]$ a sucessão (1) converge para o ponto fuxo.

Se $[a,b]$ for conhecido, qualquer $x_0 \in [a,b]$ serve para efeitos computacionais. Quando se trata de saber da convergência de $\{x_n\}$ o valor de x_0 é dado, pelo que não é suficiente conhecer um $[a,b]$, mas sim saber se é possível obter um desses intervalos que inclua o ponto x_0, isto é, pretende-se conhecer o intervalo de convergência com a maior extensão possível.

Em [1] um autor estabelece condições de $f(x)$ suficientes para que a convergência de $\{x_n\}$ se verifique, mas os resultados obtidos são demasiado restritos, nomeadamente no que se refere à monoticidade imposta à função. Mostrar-se-á aqui que é possível estabelecer condições muito mais gerais, eliminando mesmo restrições de $f(x)$ impostas pelo teorema do ponto fixo.

Para o caso de funções reais de varável real o teorema do ponto fixo diz, ver [2]:

Hipóteses:

H1) Existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in [a,b]$, $f(x)$ é definida e $f(x) \in [a,b]$, isto é, $f(x)$ é uma aplicação de $[a,b]$ em $[a,b]$.

H2) $f(x)$ é contínua em $[a,b]$

H3) $f(x)$ é diferenciável em $[a,b]$ e $\forall x \in [a,b]$ é $|f'(x)| < 1$

Teorema T1 (do ponto fixo):

" $f(x)$ tem um e um só ponto fixo $\alpha \in [a,b]$, $\alpha = f(\alpha)$ e a sucessão $\{x_0 \in [a,b], x_1 = f(x_0), \dots x_n = f(x_{n-1}), \dots\}$ converge para α".

Considere-se conhecido o intervalo $[a,b]$ onde H1), H2) e H3) se verificam. Sob as hipóteses:

H4) Existe $[c, d] \subset \mathbb{R}$, $[c, d] \supset [a, b]$, onde $f(x)$ é definida e para $\forall x \in [c, d]$ se verifica $f(x) \in [c, d]$

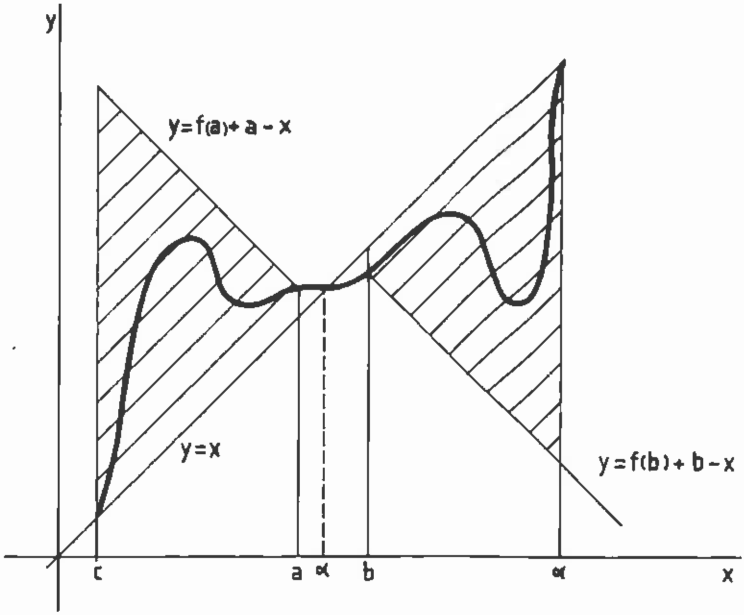
H5) $f(x)$ é contínua em $[c, d]$

H6) Para $\forall x \in [c, a[$ é $f(x) > x$

H7) Para $\forall x \in [c, a[$ é $f(x) < f(a) + a - x$

H8) Para $\forall x \in]b, d]$ é $f(x) < x$

H9) Para $\forall x \in]b, d]$ é $f(x) > f(b) + b - x$



Teorema T2):

"Para f(x) satisfazendo a H1), ... H9), a sucessão $\{x_0 \in [c, d], x_1 = f(x_0), \dots x_n = f(x_{n-1}) \dots\}$, converge para o ponto fixo $\alpha = f(\alpha) \in [a, b]$"

Demonstração:

Se na sequência de pontos obtidos por $x_n = f(x_{n-1})$ surgir um $x_i \in [a, b]$, a prova está feita pelo teorema do ponto fixo.

Os pontos $x_0, x_1, \dots x_n$ obtidos antes de se ter atingido um ponto em $[a, b]$, podem, por H4), separar-se em dois subconjuntos

$$\{x'_0, x'_1, \dots x'_k, \dots\} \quad \text{com} \quad x'_k \in [c, a[$$

e

$$\{x''_0, x''_1, \dots x''_k, \dots\} \quad \text{com} \quad x''_k \in]b, d]$$

Qualquer $x'_i = f(x_p)$ onde $x_p \in [c, a[$ ou $x_p \in]b, d]$

Se $x_p \in [c, a[$, isto é $x_p \equiv x'_{i-1}$, é :

$$x'_i = f(x'_{i-1}) > x'_{i-1} \qquad \text{por} \qquad \text{H6)} \qquad (2)$$

No caso de $x_p \in]b, d]$, será

$$x_p = x''_s = f(x''_{s-1}) \text{ , } x''_{s-1} = f(x''_{s-1}) \dots x''_w = f(x'_{i-1})$$

onde x'_{i-1} é o ponto em [a, b[que ocasionou a sequência de pontos em]a, d] que originou x_p, mas pela condição H8) é

$$x'_p \equiv x''_s < x''_{s-1} < \ldots < x'_w = f(x''_{i-1}) \qquad (3)$$

Por outro lado de H9) resulta

$$x'_i = f(x_p) > f(b) + b - x_p$$

e por (3) e H7)

$$\begin{cases} x'_i > f(b) + b - f(x'_{i-1}) \\ x'_i > f(b) - f(a) + b - a + x'_{i-1} \end{cases}$$

como $b - a > 0$, H1) implica $|f(b) - f(a)| < b - a$, vem:

$$x'_i > x'_{i-1}$$

Concluiu-se, ver (2), que a sequência $x'_0, x'_1, \ldots x'_k, \ldots$ é crescente no sentido restrito.

Para a sequência $x''_0, x''_1, \ldots x''_k \ldots$, se um ponto x''_i for gerado a partir dum ponto $x''_{i-1} \in\ ]b, d]$, a hipótese H8) acarreta

$$x''_i = f(x''_{i-1}) < x''_{i-1}$$

Se o ponto x''_{i-1} gerar uma sequência de pontos em [c, a[

$$x'_p = f(x''_{i-1}) \ , \ x'_{p+1} = f(x'_p), \ldots x'_q = f(x'_{q-1})$$

e

$$x''_i = f(x'_q)$$

Mas por (2)

$$x'_q > x'_p = f(x''_{i-1}) \qquad (4)$$

H7) conduz a

$$x'_i = f(x'_q) < f(a) + a - x'_q$$

e de H9) e (4) vem:

$$x''_i < f(a) - f(b) - (b-a) + x''_{i-1}$$

mas como $b-a>o$ e $|f(b) - f(a)| < b-a$, por H1), vem:

$$x''_i < x''_{i-1}$$

Conclui-se que $x_0'', x_1'', \ldots x''_k, \ldots$ é decrescente no sentido restrito.

Admita-se que $\{x'_0, x'_1, ...\}$ é uma sucessão e que $\{x''_0, x''_1, ...\}$ é um conjunto de pontos. Então $\{x'_k\}$, sendo crescente e majorada pelo valor a, converge para um limite $\xi' \in [c, a[$, mas por H5), terá de ser $\xi' = f(\xi')$ o que contradiz H6).

O caso em que $\{x'_0, x'_1, ... \}$ é um conjunto finito e $\{x''_k\}$ uma sucessão, implica que esta seja convergente para um valor $\xi'' \in]b,d]$, por ser decrescente e minorada pelo valor b, mas a continuidade de f acarreta que $\xi'' = f(\xi'')$ o que está em contradição com H8).

A situação em que $\{x'_k\}$ e $\{x''_k\}$ são ambas sucessões, obriga a que ambas sejam convergentes $\{x'_k\} \longrightarrow \xi'$ e $\{x''_k\} \longrightarrow \xi''$ o que ocasiona

$$\xi' = f(\xi'') \quad , \quad \xi'' = f(\xi')$$

mas por H9) e H7) é

$$\begin{cases} \xi' = f(\xi'') > f(b) + b - \xi'' \\ \xi'' = f(\xi') < f(a) + a - \xi' \end{cases}$$

donde

$$f(a) - f(b) > b - a$$

o que contradiz H1)

Em resumo $\{x'_0, x'_1, ... \}$ e $\{x''_0, x''_1, ...\}$ não podem ser sucessões, pelo que uma das sequências terá de gerar necessariamente um valor em $[a, b]$ e, de acordo com o teorema do ponto fixo, os pontos gerados a partir daí, formam uma sucessão convergente com limite e ponto fixo $\alpha = f(\alpha)$ único em todo o intervalo $[a, b]$, desta forma a demonstração está completa.

O teorema T2) permite apresentar o teorema do ponto fixo numa nova forma:

Admita-se a existência dum ponto fixo $\alpha = f(\alpha)$ em $[a, b]$. Considere-se uma vizinhança $\delta \rightarrow o$ de $x = \alpha$, $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, sendo válidas as condições H1) e H2), a convergência para α da sucessão $x_0 \in [a, b]$, $x_1 = f(x_0)$, ... $x_n = f(x_{n-1})$ ... é de acordo com T2) verificada, se se verificar

$$\begin{cases} f(x) > x \\ \\ f(x) < f(\alpha) + \alpha - x \end{cases} \qquad \text{para } x \in [a, \alpha[\qquad (5)$$

e

$$\begin{cases} f(x) < x \\ f(x) > f(\alpha) + \alpha - x \end{cases} \qquad \text{para } x \in]\alpha, b]$$

Ou seja, nesta forma a condição H3) pode ser substituída pelas condições (5), a vantagem reside no facto de não ser feito apelo à propriedade da diferenciabilidade de f(x) e à limitação do valor de f '(x). A desvantagem reside no pressuposto conhecimento do ponto fixo $\alpha = f(\alpha)$.

Pode por outro lado aproveitar-se este resultado para eliminar a restrição de diferenciabilidade de f(x) para $\forall x \in [a, b]$, imposta por H3) na demonstração de T1), mantendo a validade do teorema no caso de a função f(x) não ser diferenciável um conjunto numerável de pontos em [a, b]. Veja-se a prova desta afirmação:

- Considere-se um intervalo $[\xi_o + \delta, \alpha - \delta]$ com $\delta \to 0$ onde $\alpha = f(\alpha)$ e ξ_o qualquer, mas de forma a que f'(x) seja diferenciável nesse intervalo e $|f'(x)| < 1$ para $\forall x \in [\xi_o + \delta, \alpha - \delta]$.

Pelo teorema do valor médio

$$|f(\xi_o + \delta) - f(\alpha - \delta)| < \alpha - \xi_o - 2\delta \qquad \text{com } \delta \to 0$$

no limite de δ

$$|f(\xi_o) - f(\alpha)| < \alpha - \xi_o$$

que equivale a

$$\begin{cases} f(\xi_o) - f(\alpha) < \alpha - \xi_o \\ -f(\xi_o) + f(\alpha) < \alpha - \xi_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\xi_o) < f(\alpha) + \alpha - \xi_o \\ f(\xi_o) > \xi_o \qquad (\alpha = f(\alpha)) \end{cases} \qquad (6)$$

isto é, as condições (5) verificam-se para $\forall x \in [\xi_o, \alpha]$ pelo que (1) converge para valores x_o nesse intervalo.

α e ξ_o podem ser pontos de descontinuidade da derivada que a conclusão não é alterada.

- Considere-se o conjunto de pontos $\xi_o > \xi_1 > \xi_2 \ldots > \xi_n \geq a$, $n \in \mathbb{N}$, onde todos os pontos de descontinuidade de f '(x) em [a, α[estão incluídos.

Admita-se $|f'(x)| < 1$ no intervalo [a, α[excluindo os pontos onde $f'(x)$ não é definida. Considere-se por hipótese:

$$\begin{cases} f(\xi_{i-1}) < f(\alpha) + \alpha - \xi_{i-1} \\ f(\xi_{i-1}) > \xi_{i-1} \end{cases} \qquad (7)$$

prova-se que estas relações se mantêm se substituir i-1 por i:

Pelo teorema do valor médio, aplicado ao intervalo $I = [\xi_i + \delta, \xi_{i-1} + \delta]$

$$|f(\xi_i + \delta) - f(\xi_{i-1} - \delta)| < \max_{x \in I} |f'(x)| \, . \, (\xi_{i-1} - \xi_i + 2\delta) \text{ com } \delta \to o$$

$$\begin{cases} f(\xi_i + \delta) - f(\xi_{i-1} - \delta) < \xi_{i-1} - \xi_i + 2\delta \\ -f(\xi_i + \delta) + f(\xi_{i-1} - \delta) < \xi_{i-1} - \xi_i + 2\delta \end{cases}$$

no limite $\delta \to 0$

$$\begin{cases} f(\xi_i) - f(\xi_{i-1}) < \xi_{i-1} - \xi_i \\ -f(\xi_i) + f(\xi_{i-1}) < \xi_{i-1} - \xi_i \end{cases} \qquad (8)$$

por (8) vem:

$$\begin{cases} f(\xi_i) < f(\alpha) + \alpha - \xi_i \\ f(\xi_i) > \xi_i \end{cases} \qquad (9) \quad \text{para } \xi_i \in [a, \alpha[$$

Dado estas relações serem válidas para ξ_o, ver (6), ficou demonstrado por indução finita a validade em todos os pontos do conjunto $\{\xi_o, \xi_1, \ldots\}$. Atendendo a que pode ser incluído neste conjunto qualquer ponto do intervalo $[a, \alpha[$, as relações (9) são válidas em todo esse intervalo.

O mesmo raciocínio pode aplicar-se a um conjunto de pontos $\alpha < \zeta_o < \zeta_1 \ldots \zeta_o < b$. Basta substituir os ξ_k por ζ_k e inverter o sinal das desigualdades em (6), (7), (8) e (9), atendendo a que $\alpha - \zeta_o$ tem sinal contrário a $\alpha - \xi_o$ em (6), o mesmo acontecendo a $\zeta_{i-1} - \zeta_o$ relativamente a $\xi_{i-1} - \xi_i$ em (9).

$$\begin{cases} f(\zeta_i) > f(\alpha) + \alpha - \zeta_i \\ f(\zeta_i) < \zeta_i \end{cases} \quad \text{para } \zeta_i \in [\alpha, b] \qquad (10)$$

Verificando-se H1) e H2) e $|f'(x)| < 1$ no intervalo [a, b], excluindo um conjunto numerável de pontos, provou-se que as condições (5) são verificadas, pelo pelo que o teorema do ponto fixo permanece válido.

Quanto ao problema da convergência de (1) para um x_0 dado, do ponto de vista da aplicação, o intervalo [c, d] para o qual $x_0 \in$ [c, d] conduz à convergência de (1) para $\alpha = f(\alpha)$, pode determinar-se, admitindo α conhecido, da seguinte forma:

$$u' = \max_x \quad f(x) = x \ , \quad x < \alpha$$

$$u'' = \max_x \quad f(x) = f(\alpha) + \alpha - x \ , \quad x < \alpha$$

$$v' = \min_x \quad f(x) = x \ , \quad x > \alpha$$

$$v'' = \min \quad f(x) = f(\alpha) + \alpha - x \ , \quad x > \alpha$$

Se u' (ou u") não existir faz-se $= -\infty$. Seguidamente

$\beta' = \text{máx} \ (u', v')$ para garantir H6) e H7)

$\beta'' = \text{máx} \ (u'', v')$ " " H8) e H9)

calcula-se ∂' e ∂'' por:

$$\partial' = \max_x \quad f(x) = \beta'' \ , \quad x < \alpha$$

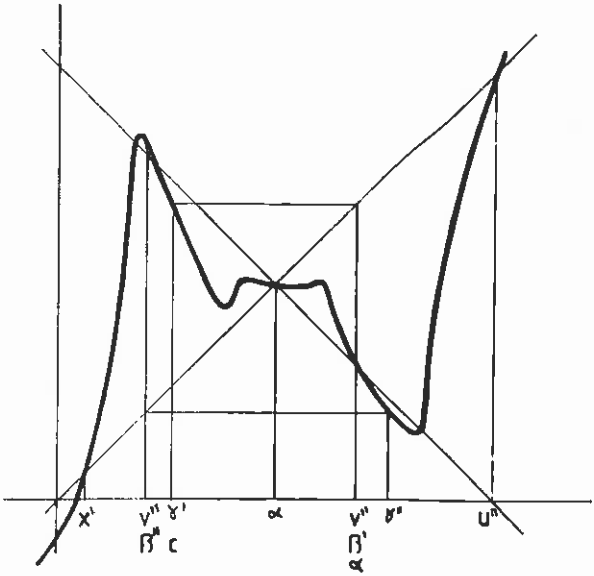
para garantir H4)

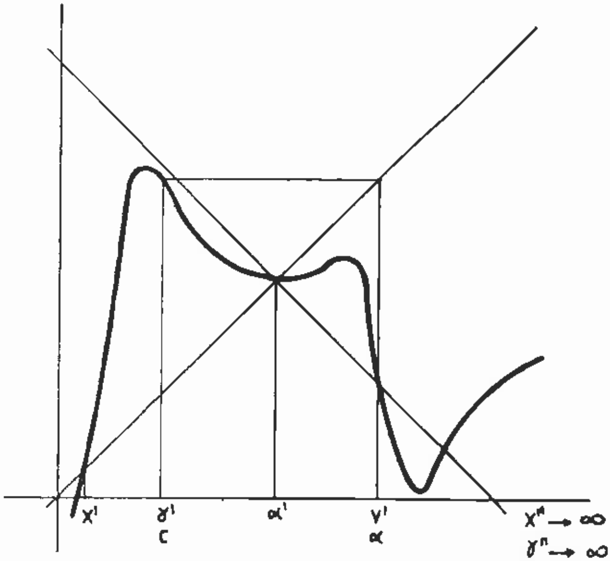
$$\partial'' = \min_x \quad f(x) = \beta' \ , \quad x > \alpha$$

os extremos do intervalo [c, d] obtêm-se por

$$c = \text{máx} \ (\beta', \partial')$$
$$d = \min \ (\beta'', \beta'')$$

A interpretação geométrica pode ver-se, nos exemplos das figuras seguintes:





Referências:

(1) - H. Varandas Esteves: "Considerações acerca de uma sucessão", Educação e Tecnologia, nº4 - Março/89

(2) - S. D. Conte, C. de Boor: "Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach", McGraw-Hill, 1983