EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA

Revista do Instituto Politécnico da Guarda

"EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA"
Propriedade: INSTITUTO POLITÉCNICO DA GUARDA

Director: **João Bento Raimundo**

Redacção: **Rua Comandante Salvador do Nascimento**
Telfs. 211634/213062 . Fax 211690
6300 - GUARDA

Composição, Execução Gráfica e Impressão: **Secção de Reprografia do IPG**

Depósito legal nº 17. 981/87

Nº VIII/Julho de 1991

Capa: *Novo Edifício dos Serviços Centrais do IPG*

UM SÍMBOLO DA EVOLUÇÃO

"(...) uma criatura só não presta quando deixou de ser inquieta."

Miguel Torga

"Educação e Tecnologia" é bem o símbolo da evolução registada no Instituto Politécnico da Guarda nestes últimos seis anos.

Esta Revista firmou-se e afirmou-se editorialmente, reuniu colaborações, projectou um espaço de diálogo cultural, pedagógico e científico, definiu horizontes precisos, concretos.

Hoje, *"Educação e Tecnologia"* é bem uma das múltiplas vertentes da Instituição de Ensino Superior onde é editada com a periodicidade estipulada desde a sua criação. Não cristaliza fórmulas e conteúdos, antes pelo contrário assimila e cria outras ideias e projectos, utiliza progressivamente novos meios e tecnologias colocados à sua disposição, do ponto de vista gráfico e técnico.

"Educação e Tecnologia" assume, naturalmente, um papel informativo mas dimensiona, igualmente, o seu, cada vez maior, impacto difusor de temáticas e ideias, rejuvenescendo em cada edição.

O presente número antecede a entrada em funcionamento do novo edifício dos Serviços Centrais do Instituto Politécnico e igualmente do Pólo de Seia do IPG. Se em termos de colaborações e participações a nossa Revista consolidou uma equipa, em termos de estruturas físicas encontra assim, doravante, uma nova e promissora realidade.

João Bento Raimundo
Presidente da C. I. do
Instituto Politécnico da Guarda

SUCESSÕES REAIS DEFINIDAS PELA FÓRMULA $x_{n+1} = f(x_n)$

Henrique Varandas Esteves*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Estes apontamentos são a continuação do artigo publicado no nº 5 - (Set/89) desta revista, páginas 107 a 115. Em relação a este artigo chama-se a atenção do leitor, para os seguintes erros:

Página 111 linha 8 onde está $f(L) < 1$ deve ler-se $f'(L) < L$;

página 112 linha 5 onde se lê $x_{u+1} = f(x_n)$ deve ler-se $x_{n+1} = f(x_n)$;

página 113 linhas 16 e 17 deve ler-se $u_{n+1} = \sqrt{2} + u_n$ e não $u_{u+1} = \sqrt{2} + u_u$;

página 114 linhas 9 e 10 deve ler-se u_n e não u_u.

Foram estudadas naquele artigo propriedades respeitantes às sucessões em epígrafe, no caso de $f(x)$ ser função crescente. Mas na nota final do mesmo enunciaram-se propriedades da sucessão, relativas à hipótese de $f(x)$ ser decrescente. É deste assunto que nos vamos ocupar.

2 PROPRIEDADES

Consideremos a sucessão cujo 1º termo é x_0 e os restantes termos são definidos pela fórmula:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

---

* Professor Adjunto da ESTG

Vamos supor que $f: [a, b] \longrightarrow [a, b]$ obedece às seguintes condições:

i) f é contínua e decrescente

ii) $L = f(L) \in [a, b]$ (ponto fixo de f)

Propriedade 1

Se $f \circ f(x) > x$ para $x < L$, $x_0 < L$ e $x_0 \in [a, b]$ então a subsucessão $\{x_{2k}\}$ é crescente e converge para L.

De facto

a) $x_0 < L \Rightarrow x_1 = f(x_0) > f(L) = L$

b) $x_1 > L \Rightarrow x_2 = f(x_1) < f(L) = L$

Mas $x_2 = f \circ f(x_0)$ e em virtude da hipótese temos:

c) $x_2 > x_0$

De a), b) e c) concluímos que

$x_0 < x_2 < L$ (ver figura 1)

Pelo método de indução e repetindo o processo anterior concluiremos que:

$\{x_{2k}\}$ é crescente e majorada por L, portanto convergente.

Tomando limites em

$$x_{2k} = f \circ f(x_{2k-2})$$

temos, atendendo à continuidade de $f \circ f(x)$

$$\lim x_{2k} = f[\lim f(x_{2k-2})] = f[f(\lim x_{2k-2})]$$

Designando α o limite da sucessão $\{x_{2k}\}$, vem

$$\alpha = f[f(\alpha)]$$

ora $\alpha \leq L$. Mas se $\alpha < L$, então por hipótese seria $f[f(\alpha)] > \alpha$ o que contradiz a igualdade anterior, logo $\alpha = L$, isto é:

$$\lim x_{2k} = L$$

Nota: $f \circ f(x)$ é contínua pois $f(x) \in [a, b]$ e é contínua por hipótese.

Propriedade 2

Se $f \circ f(x) < x$ para $x < L$, $x_0 > L$ e $x_0 \in [a, b]$ então a subsucessão $\{x_{2k+1}\}$ é decrescente e converge para L.

A demonstração é análoga à anterior (ver figura 1).

Observação: Nas subsucessões $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$ $k \in N_0$

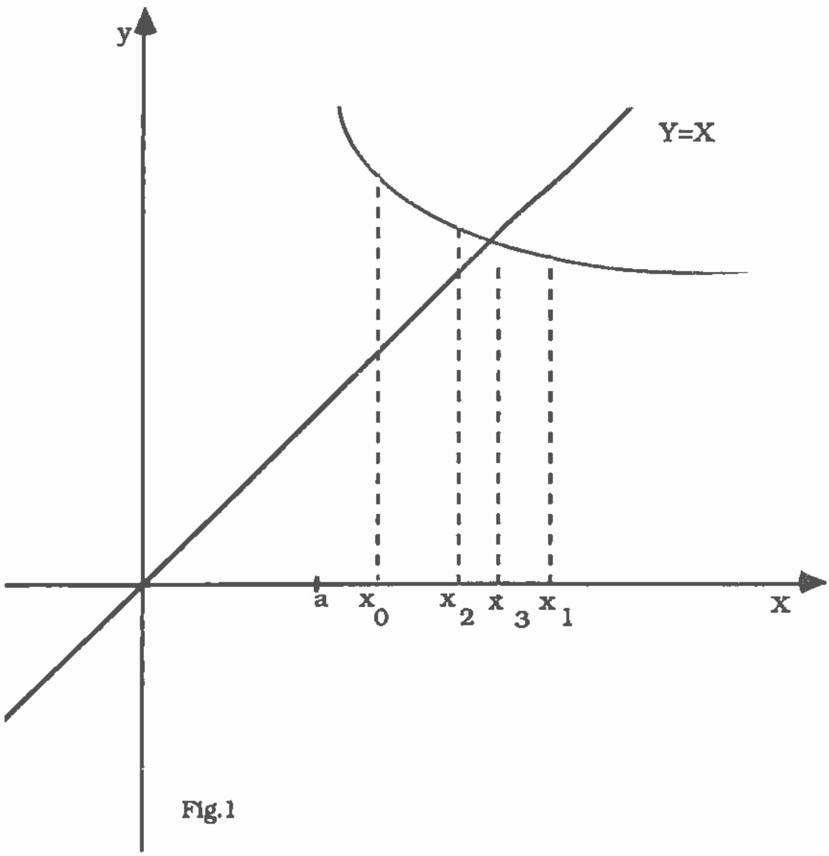

Fig.1

Propriedade 3

Se $f \circ f(x) = x$ e $x_0 \neq L \in [a, b]$, então a sucessão é oscilante, sendo $x_{2k} = x_0$ e $x_{2k+1} = f(x_0)$

De facto, atendendo a que $f \circ f(x) = x$, resulta:

$$x_2 = f \circ f(x_0) = x_0$$

Por indução temos então:

$x_{2k} = x_0$

Além disso é:

$x_1 = f(x_0)$; $x_3 = f \circ f(x_1) = x_1 = f(x_0)$

e por indução concluímos que

$x_{2k+1} = f(x_0)$

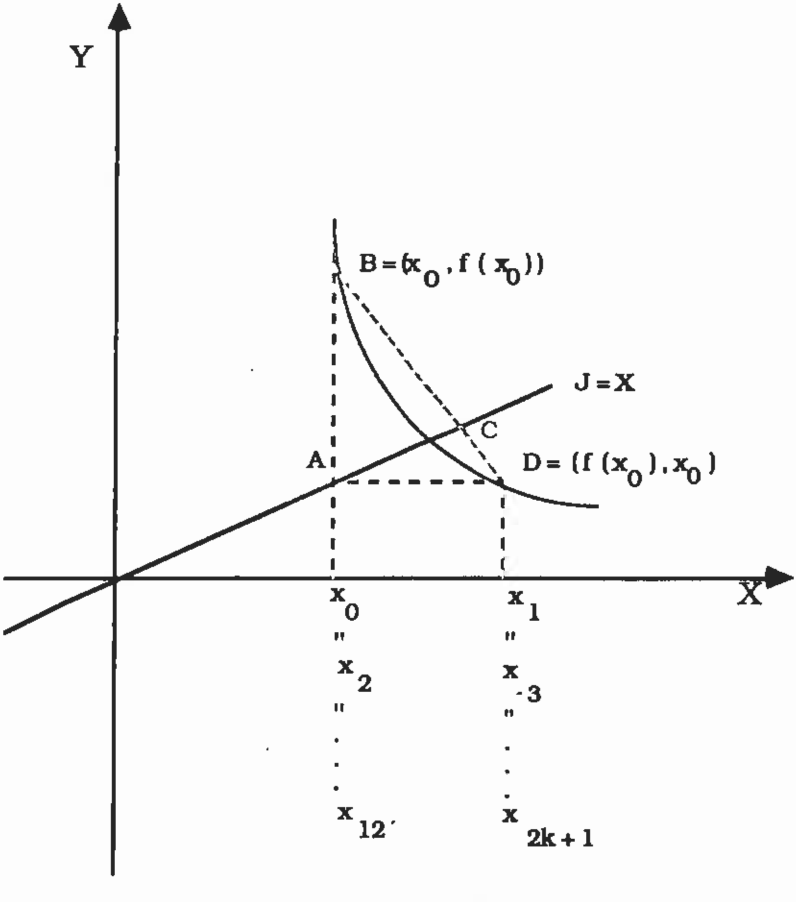

Fig.2

De notar que $\Delta ACB = \Delta ADC \Rightarrow [BC] = [CD]$
Observação: A propriedade anterior sugere esta outra:

Se $f(x)$: $[a, b] \quad R \longrightarrow [a, b]$ verifica a condição $f \circ f(x) = x$, então o gráfico de f é simétrico em relação à recta de equação $y = x$ e reciprocamente, isto é:
se f: $[a, b] \quad R \longrightarrow [a, b]$ tem a imagem simétrica em relação à recta $y = x$, então $f \circ f(x) = x$, $\forall x \in [a, b]$.

Com efeito o ponto $(x_0, f(x_0))$ pertence ao gráfico de f qualquer que seja $x_0 \in [a, b]$. Mas nas condições referidas anteriormente também pertence ao gráfico de f o ponto
$(f(x_0), f \circ f(x)) = (f(x_0), x_0)$, o que quer dizer que a imagem de f é simétrica em relação à recta $y = x$ (ver figura 2).

Reciprocamente, se o gráfico de f é simétrico em relação à recta $y = x$, então pertencem ao mesmo gráfico os pontos

$$(x_0, f(x_0)) \text{ e } (f(x_0), x_0), \ \forall x_0 \in [a, b]$$

e portanto

$$f \circ f(x) = x, \ \forall x \in [a, b]$$

Notemos também que neste caso se tem $f = f^{-1}$.

Consequências

É claro que nas condições da propriedade 3 a sucessão é divergente. Nas restantes hipóteses, isto é, verificando-se $f \circ f(x) \neq x$, podemos concluir se atendermos às propriedades 1 e 2:

A) Se f verificar simultaneamente as condições de 1 e 2, então a sucessão é convergente para $L = f(L)$. É uma consequência de as subsucessões $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$ serem convergentes para o mesmo limite, $L = f(L)$.

B) Se $D_f =]-\infty, b]$ e não se verifica a condição ii) de 1, então a sucessão é divergente.
Neste caso seria ii) substituída por $f \circ f(x) < x$ e viria $\lim x_{2k} = \infty$ e portanto $\{x_n\}$ divergente.

C) Se $D_f = [a, +\infty[$ e não se verifica a condição ii) de 2, então a sucessão é divergente.
De modo análogo ao exposto em C) se teria $\lim x_{2k+1} = -\infty$ e portanto $\{x_n\}$ divergente.

D) Em todos os casos em que $x_0 = L$ é evidente que a sucessão tem todos os termos iguais a L e portanto converge para L.

3 COMPORTAMENTO DA DERIVADA

No caso de f cumprir as condições de 1 temos, para $x < L$:

$f \circ f(x) > x \Rightarrow f \circ f(x) - L < x - L$

Mas $x < L \Rightarrow f(x) > f(L) \Rightarrow f \circ f(x) < f \circ f(L) = L$ e portanto $f \circ f(x) - L < 0$ e $x - L < 0$, logo:

$$0 < \frac{f \circ f(x) - L}{x - L} < 1$$

ou seja

$$0 < \frac{f \circ f(x) - f \circ f(L)}{x - L} < 1$$

De modo análogo se prova a dupla desigualdade anterior para $x > L$, caso f cumpra as condições de 2. Tomando limites quando $x \longrightarrow L$, vem:

$0 \leq [f \circ f(L)]' \leq 1$

Mas $[f \circ f(L)]' = f'(L) \times f'[f(L)] = [f'(L)]^2$

temos pois

$[f'(L)]^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f'(L) \leq 1$

Atendendo a que $f'(L) \leq 0$, concluímos que

$-1 \leq f'(L) \leq 0$

No caso de f cumprir as condições referentes à propriedade 3, temos

$f \circ f(x) = x$

e portanto

$$\frac{f \circ f(x) - f \circ f(L)}{x - L} = \frac{x - L}{x - L} = 1$$

e tomando limites quando $x \longrightarrow L$ vem

$[f \circ f(L)]' = 1 \Leftrightarrow [f'(L)]^2 = 1$

e atendendo a que $f'(L) < 0$ vem

$$f'(L) = -1$$

Analogamente à nota feita no artigo anterior já referido da página 112 do nº 5 desta revista, podemos escrever:

Sendo $f(x)$: $[a, b] \longrightarrow R$ contracção decrescente e se para $x < L$ é $f \circ f(x) > x$ e para $x > L$ é $f \circ f(x) < x$, com $L = f(L)$ e $x_0 \in [a, b]$, então a fórmula $x_{n+1} = f(x_n)$ gera uma sucessão oscilante quando $x_0 \neq L$ é convergente para L, $\forall x_0 \neq L$

É uma consequência das propriedades 1 e 2.

De notar que no enunciado daquelas propriedades escreveu-se para assentar ideias que $x_0 < L$, mas se $x_0 > L$, as propriedades continuam válidas e a demonstração é análoga, só que neste caso é $\{x_{2k}\}$ decrescente e $\{x_{2k+1}\}$ crescente.

4 APLICAÇÕES

1) Seja a sucessão definida pela fórmula

$$\begin{cases} x_{n+1} = m\,x_n + b \\ x_0 \in R \end{cases}$$

Neste caso temos $f(x) = m\,x + b$ (recta não vertical) e para que a sucessão seja convergente nas condições das propriedades 1) e 2) há-de verificar-se

i) f decrescente e contínua, logo $m < 0$

ii) $f(L) = L$, logo $m\,L + b = L \Rightarrow L = \dfrac{b}{1-m}$

Também há-de ser

a) $f \circ f(x) > x$ quando $x < \dfrac{b}{1-m}$ e portanto

$$m^2 x + (m+1)\,b > x \Leftrightarrow (m^2 - 1)\,x > -(m+1)\,b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{b}{1-m} \text{ quando } m^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < m < 0$$

b) $f \circ f(x) < x$ quando $x > \dfrac{b}{1-m}$ o que implica

$(m^2 - 1)\, x < -(m + 1)\, b \Leftrightarrow x > \dfrac{b}{1 - m}$ quando $m^2 - 1 < 0 \Rightarrow 1 < m < 0$

Em conclusão se $-1 < m < 0$, a sucessão proposta

é convergente para $L = \dfrac{b}{1 - m}$

De notar que se $m = -1$ viria
$f(x) = -x + b$ e $f \circ f(x) = -(-x + b) + b = x$
e portanto, segundo a propriedade 3, a sucessão é oscilante divergente.

No caso de ser $m < -1$ então para $x < L$ ou seja $x < \dfrac{b}{1-m}$

temos $m^2 x + (m + 1)\, b < m$
o que equivale a $f \circ f(x) < x$ e em virtude de B) a sucessão diverge.
Para $m = 0$ é evidente que a sucessão é convergente para b.
Em conclusão: a sucessão definida pela fórmula

$$\begin{cases} x_{n+1} = m\, x_n + b \\ x_0 \text{ qualquer real}, \; m < 0 \end{cases}$$

é convergente para $L = \dfrac{b}{1 - m}$ se $-1 < m \leq 0$

e divergente quando $m \leq -1$.
Um exemplo concreto deste tipo de sucessões foi apresentado no 1º teste de Matemática I, desta Escola, em 1/2 /89, onde se definiam as sucessões:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = -1/2\, a_n + 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad b_n = a_n - 4$$

Nas alíneas b) e c) mandavam-se calcular os limites de b_n e a_n. Alterando a ordem das respostas podemos calcular lim a_n aplicando o estudo feito atrás e teremos:

$$\lim a_n = \frac{6}{1 + 1/2} = \frac{6}{3/2} = 4$$

e viria então $\lim b_n = 4 - 4 = 0$

2) Estudar a sucessão definida por

$$x_{n+1} = \frac{8}{x_n - 2} \qquad \text{e} \qquad x_0 < 2$$

Consideremos a função que corresponde à fórmula de recorrência atrás indicada:

$$f :]-\infty, 2[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ com } f(x) = \frac{8}{x-2}$$

O estúdo de f (é uma restrição de uma função homográfica) leva-nos à conclusão que o seu gráfico é parte de uma hipérbole equilátera (ver figura 3) cujas assíntotas são $x = 2$ e $y = 0$

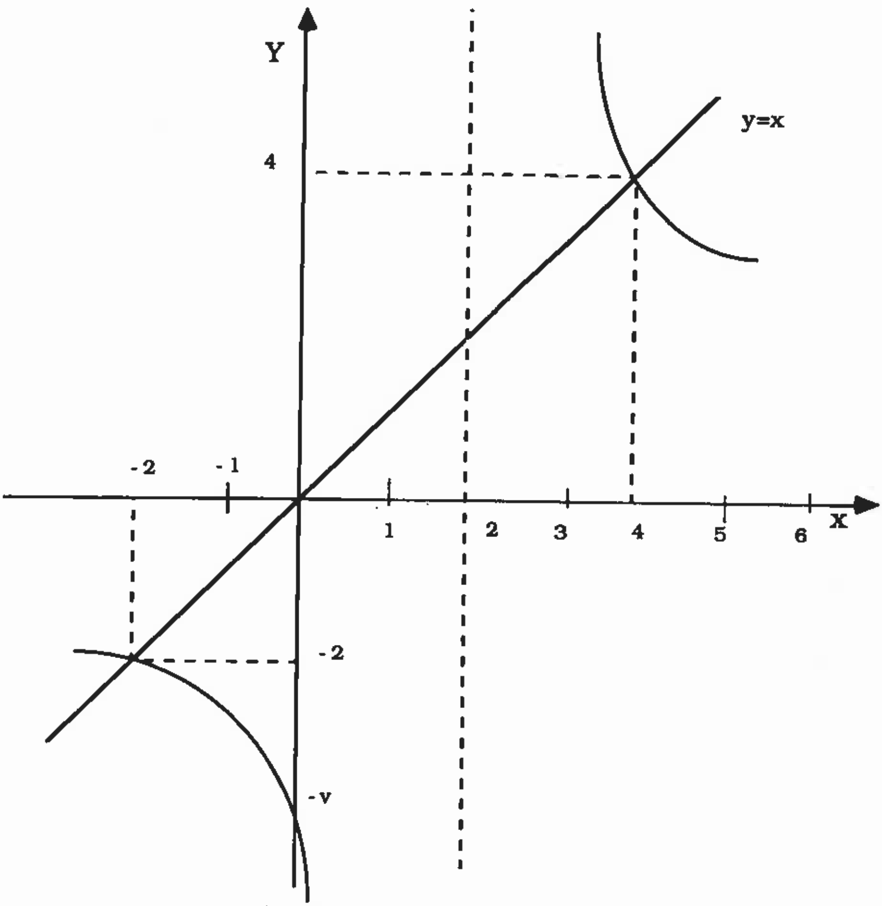

Fig. 3

O ponto fixo que se obtém resolvendo a equação

$$L = \frac{8}{L-2} \quad \text{é} \quad L = -2$$

Como $f \circ f(x) = \dfrac{4x-8}{6-x}$, vem

$$f \circ f(x) - x = \frac{4x-8}{6-x} - x = \frac{x^2-2x-8}{6-x},$$

O quadro de variação do sinal de $f \circ f(x) - x$ é

x		-2		4		6	
$x^2 - 2x - 8$	+	0	—	0	+	+	+
$6 - x$	+	+	+	+	+	0	—
$f \circ f(x) - x$	+	0	—	+	+	∞	—

Interessa-nos para o caso em estudo a variação do sinal para $x < 2$. E temos então:

a) $f \circ f(x) > x$ se $x < -2$

b) $f \circ f(x) < x$ se $x \in]-2, 2[$

Em virtude das propriedades 1) e 2) concluímos então que a sucessão é convergente para $L = -2$

3) Estudar a sucessão definida por

$$x_{n+1} = \frac{8}{x_n - 2} \text{ e } x_0 > 2$$

Neste caso f(x) tem a mesma fórmula de definição do exemplo 2, mas o domínio é agora o intervalo $]2, +\infty[$ (ver figura 3).

O ponto fixo é a outra raiz da equação $L = \dfrac{8}{L-2}$

ou seja $L = 4$

Consultando o quadro de variação do sinal de $f \circ f(x)$ temos:

a) $f \circ f(x) < x$, para $x \in]2, 4[$

b) $f \circ f(x) > x$, para $x \in]4, 6[$

c) $f \circ f(x) < x$, para $x > 6$

e concluímos que não há garantia de as sucessões convergirem para $L = 4$ pois não se verifica **A)**. Acontece ainda que para $x_0 > 6$ é $x_1 < 2$ e portanto saímos do domínio da função geradora e não será definida a sucessão. No entanto, se considerarmos a ampliação de f a $\mathbb{R} - \{2\}$, esta continuará a gerar sucessões e tendo em vista o exemplo 2 sabemos que convergem para $L = -2$.

Para $x_0 \in]2, 4[\cup]4, 6[$ as alíneas a) e b) indicam que os termos da sucessão se afastam de 4, e atingirão valores maiores que 6 e portanto a sucessão convergirá para $L = -2$.

Para $x_0 = 2$ ou $x_0 = 6$ a sucessão não é definida. Para $x_0 = 4$ a sucessão tem todos os seus termos iguais a 4 e portanto é convergente para tal valor.

4) **Seja** a sucessão definida por

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{k}{x_n}, \ k > 0 \\ x_0 \in \dot{\mathbb{R}}^+ \end{cases}$$

Com a finalidadede de proceder ao estudo da natureza da sucessão proposta, consideremos a função correspondente à fórmula de recorrência:

$$f(x) = \frac{k}{x}, \ k > 0 \text{ e } D_f = \mathbb{R}^+$$

O gráfico de f é o ramo da hipérbole situado no primeiro quadrante e cujas assíntotas são os eixos coordenados (ver figura 4).

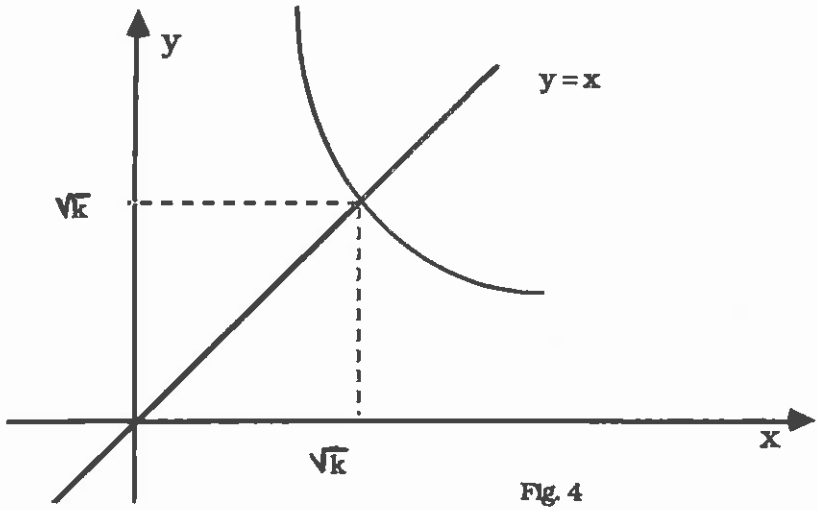

Fig. 4

O ponto fixo é

$$\frac{k}{L} = L \Rightarrow L = \sqrt{k}$$

Como f é decrescente e contínua e além disso

$$f \circ f(x) = \frac{K}{k/x} = x$$

estão verificadas as condições da propriedade 3 e portanto todas as sucessões serão oscilantes e divergentes para $x_0 \neq \sqrt{k}$.

Para $x0 = \sqrt{k}$ temos a sucessão de termos constantes e iguais a $\sqrt{k}$ que converge para $\sqrt{k}$ conforme D).

5 NOTA FINAL

Estes apontamentos tiveram origem no artigo publicado por nós nesta revista (nº 4), páginas 187 a 195, sob o título "Considerações acerca de uma sucessão". Tratava-se de uma sucessão que havia sido proposta no 1º teste de Matemática I realizado nesta Escola durante o 1º semestre do ano 1988/89. A finalidade essencial destas considerações será porventura apontar caminhos diferentes na resolução deste tipo de problemas. Além disso também ficamos a dispor de processos que nos permitirão propor enunciados diversos de problemas relativos ao estudo deste tipo de sucessões.

Notemos ainda que as propriedades apresentadas nestes apontamentos, se poderão combinar, com as propriedades estudadas no artigo já referido e publicado no nº 5 / Setembro/89 desta revista e ainda com propriedades de simetria do gráfico de f(x) o que potencia as aplicações, conforme mostraremos na próxima oportunidade.

Para finalizar observemos que a aplicação ao estudo de sucessões definidas de N em R^q é imediata, se atendermos a que o estudo da convergência destas sucessões se pode fazer pelo estudo da convergência das sucessões componentes.

Em próxima oportunidade serão apresentadas aplicações.