EDUCAÇÃO e TECNOLOGIA

Revista do Instituto Politécnico da Guarda

EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA
Propriedade : Instituto Politécnico da Guarda
Director : **João Raimundo**
Redacção : **Serviços Centrais do IPG - Quinta do Zâmbito**
6300 Guarda * Telf. 222634 * Fax 222690
Composição : **Gabinete Editorial do IPG**
Execução Gráfica e Impressão : **Secção de Reprografia do IPG**
Depósito Legal **nº 17.981/87**
Periodicidade : **Semestral**

nº X - Julho de 1992

Capa : Vista parcial do edifício do Pólo de Seia do
Instituto Politécnico da Guarda

UM PROJECTO, UMA OBRA...

A edição deste número coincide com o final de mais um ano lectivo e outrossim com o epílogo da nova estrutura física do Instituto Politécnico da Guarda.

Símbolo da modernidade e do progresso, este Instituto é, já no presente, uma resposta credenciada às exigências das próximas décadas e uma via de futuro para os cerca de três milhares de jovens que o irão frequentar a partir de Outubro.

Será, então, ampliado neste estabelecimento de ensino superior o leque de cursos que são indispensáveis à actual e futura conjuntura de desenvolvimento regional, empresarial e industrial, cujo percurso tem de ser pautado pela necessidade de se marcar uma presença digna, activa e de qualidade no cenário europeu.

"Nómadas do mundo, teremos de ser agora sedentários conviventes nesta Europa onde sempre coubemos mal e nunca nos soubemos realizar", **como escreveu Miguel Torga.**

E esta presença tem sido bem afirmada pelo Politécnico da Guarda, através das suas múltiplas relações com estabelecimentos de ensino congéneres.

Cumpriu-se um projecto. O Instituto Politécnico é uma realidade resultante de um trabalho planificado, de uma ideia assumida, da resposta consciente a objectivos definidos, tendo subjacente a comunidade regional. O IPG é, bem poderemos dizer, uma obra impulsionada pela " força de um sonho inteiro".

João Raimundo
Presidente do IPG

MODELOS PARA BANDAS DE ABSORÇÃO DA RADIAÇÃO TÉRMICA*

Parte I - Modelos de risca isolada e de riscas independentes

António Biga de Almeida**

Resumo: Descrevem-se e comparam-se dois modelos aplicáveis a bandas de absorção no domínio do infravermelho — o modelo de uma risca isolada e um modelo de riscas independentes.

O formalismo matemático, suporte destes modelos, é aproximado aos casos limite de camadas finas e moderadamente espessas, características dos percursos ópticos do dióxido de carbono e do vapor de água na Atmosfera da Terra.

1. INTRODUÇÃO

Os modelos de riscas ou de bandas constituem uma técnica que permite obter valores médios de absorção e de transmissividade, em intervalos onde ocorrem estruturas espectrais muito finas, sem provocar distorções significativas no contorno real da variação do coeficiente monocromático de absorção com a frequência.

Em estudos de resolução elevada, o cálculo de valores da função de transmissão implica que sejam considerados modelos

* Agradecimentos: As sugestões e os conselhos que o autor recebeu do Sr. Prof. Doutor José Pinto Peixoto, foram muito úteis para a concretização deste trabalho.
** Professor Coordenador. Director do Departamento de Física.

para uma só risca. Quando o intervalo de frequências é relativamente largo, utiliza-se um modelo de bandas que se considere apropriado.

Os modelos de riscas que se utilizam no estudo da radiação térmica são o de Lorentz, o de Doppler e o de Voigt ou Lorentz/Doppler. Benedict (1956), Rank (1960), Goody (1964), Kondratyev (1965,69), Zuev (1970), Peixoto (1975), Houghton (1985) e outros autores, defendem e utilizam o modelo de Lorentz para representar a variação do coeficiente monocromático de absorção com a frequência. Spitzer (1940) indica limitações à aplicação deste modelo; Holstein (1950) apresenta outras expressões para representar $K(\upsilon)$ que não a de Lorentz; Winters (1964) propõe um perfil a ser utilizado na banda υ_3 (4. 3 μ) do CO_2. Neste estudo considera-se o modelo de Lorentz.

Os modelos de bandas são constituídos por uma distribuição infinita de riscas de absorção. Um subconjunto desta distribuição, contendo N riscas, faz a cobertura do intervalo espectral de frequências que se pretende estudar.

A principal limitação dos modelos de bandas resulta do seguinte: no modelo, cada intervalo é limitado por outros intervalos estatisticamente semelhantes; no espectro real a situação não será exactamente esta. Surgem então problemas resultantes do efeito da sobreposição das riscas, que os modelos, de um modo geral, dificilmente solucionam. Estes problemas acentuam-se, quando o meio onde ocorre a absorção e a transferência da radiação, constitui uma camada óptica espessa ou uma camada óptica fina, no intervalo de frequências onde o modelo é aplicado.

O estudo experimental das bandas de absorção do CO_2, no espectro da radiação térmica, sugeriu a criação do modelo de Elssasser. É constituído por uma repetição periódica de uma risca que satisfaz a distribuição de Lorentz.

O estudo teórico e experimental das bandas rotacionais do vapor de água, feito por Cowling (1950), conduziu Goody (1952) a considerar que a característica comum, em bandas de largura aproximada $\Delta\upsilon$=25 cm^{-1}, é a aparente distribuição aleatória da posição das riscas. Surgiram então os modelos aleatórios, dos quais devem destacar-se os de Goody (1952-64).

Os modelos mais correntes são modelos de banda estreita, tais como o Elssasser e os aleatórios ou estocásticos; existem ainda modelos de banda larga, que se obtêm a partir da formulação geral dos modelos de banda estreita.

Neste trabalho analisam-se quatro modelos: O modelo de uma risca satisfazendo a distribuição de Lorentz; um modelo de riscas independentes, de intensidades não necessariamente iguais; o modelo regular de Elssasser; o modelo aleatório de Goody. Os dois primeiros constituem a primeira parte do estudo. Os restantes serão descritos posteriormente.

2. O MODELO DE UMA RISCA ISOLADA

A absorção média, num dado intervalo $\Delta\upsilon$, definida através da intensidade da radiação monocromática, pode calcular-se, no caso geral, utilizando o teorema da média.

Nas condições médias de pressão e temperatura da Atmosfera, pode dizer-se que $\alpha = .10\ cm^{-1}$ é já um valor elevado para a semi-largura das riscas dos espectros do vapor de água e do dióxido de carbono, na região do infravermelho; seja $\delta = 1.0\ cm^{-1}$, o espaçamento médio entre duas riscas consecutivas. Com estes valores de α e δ, a contribuição de uma risca para o coeficiente de absorção correspondente à frequência central de outra risca adjacente, é apenas da ordem de 1% da contribuição própria da risca, na respectiva frequência central.

Consideram-se intervalos de frequências $(\Delta\upsilon)$ onde os coeficientes monocromáticos de absorção resultam apenas da contribuição de uma risca; o meio onde a radiação se propaga é suposto homogéneo; considera-se a intensidade da radiação, no intervalo $\Delta\upsilon$, independente da frequência. Nestas condições tem-se, pelo teorema da média, o seguinte:

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{1}{\Delta\upsilon} \int_{\Delta\upsilon} \{1-\exp[-k(\upsilon)\, m]\}\, d\upsilon \qquad (1.1)$$

$$\simeq \frac{1}{\Delta\upsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 - \exp[-k(\upsilon)\, m]\}\, d(\upsilon - \upsilon_0) \qquad (1.2)$$

onde $A(\Delta\upsilon)$ representa o valor médio da função de absorção em $\Delta\upsilon$. <u>m</u> é o percurso óptico da radiação e $k(\upsilon)$ é o coeficiente monocromático de absorção, por unidade de massa, cuja variação se considera condicionada pela distribuição de Lorentz.

A espessura óptica correspondente à frequência central da risca, constitui um limite superior das espessuras ópticas nas frequências do intervalo $\Delta\upsilon$; quando esta espessura for muito pequena, podemos escrever a equação (1.2) na seguinte forma aproximada:

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) \simeq \frac{1}{\Delta\upsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\upsilon)\, m\, d(\upsilon-\upsilon_0) \simeq \frac{Sm}{\Delta\upsilon} \qquad (1.3)$$

S representa a intensidade da risca. Neste caso particular, a absorção média é independente da forma da risca. Nas condições médias da temperatura da Atmosfera, o valor médio da função de absorção varia linearmente com o percurso óptico da radiação e não depende da pressão. Não há relação entre a amplitude de $\Delta\upsilon$ e o valor da semi-largura da risca. Neste caso o meio absorvente constitui uma camada óptica fina, para radiação cuja frequência esteja contida em $\Delta\upsilon$.

O valor da absorção média verifica então a seguinte igualdade:

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{1}{\Delta\upsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \exp\left[- \frac{S\,m\,\alpha/\pi}{(\upsilon-\upsilon_0)^2 + \alpha^2} \right] \right\} d(\upsilon-\upsilon_0) \quad (1.4)$$

Se a espessura óptica, correspondente à frequência central, for muito elevada, o valor de α^2 pode desprezar-se na equação anterior. O aumento que resulta para a função de absorção, só é significativo na zona central da risca, onde o valor da absorção já é muito próximo da unidade, quer se despreze α^2 ou não. Neste caso particular a equação anterior pode escrever-se na forma

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{1}{\Delta\upsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \exp\left[- \frac{S\,m\,\alpha/\pi}{(\upsilon-\upsilon_0)^2} \right] \right\} d(\upsilon-\upsilon_0) \quad (1.5)$$

Nesta equação, para cada valor de $Sm\alpha/\pi$, a função integranda é regular; varia desde zero até um; o seu domínio é o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Quando os valores da espessura óptica, correspondente à frequência central da risca, não são inferiores a 10^5, a absorção é total para todas as frequências do intervalo $(\upsilon-\upsilon_0)$, de amplitude igual a $10^2\,\alpha$. Para valores da espessura óptica não inferiores a 10^6, a absorção é total nas frequências do intervalo de amplitude 630 α.

Fazendo $\mu = S\,m\,\alpha/[\pi(\upsilon-\upsilon_0)^2]$ resulta o seguinte:

$$d\mu = -2\,\frac{S\,m\,\alpha}{\pi} \cdot \frac{d(\upsilon-\upsilon_0)}{(\upsilon-\upsilon_0)^3} \quad (1.6)$$

$$d(\upsilon-\upsilon_0) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S\,m\,\alpha}{\pi}} \cdot \mu^{-3/2} \cdot d\mu \quad (1.7)$$

Vamos calcular o valor de $A(\Delta\upsilon)$, substituindo o integral da absorção espectral na equação (1.5) pela soma de dois integrais, calculados em intervalos onde o incremento que resulta de considerar $\exp(-x) = 1 - x$, permite obter ainda o mesmo resultado que se obtém directamente da integração de (1.5).

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{1}{\Delta\upsilon}\left\{ \int_{\Delta\upsilon_1} \left[1 - \exp\left(- \frac{S\,m\,\alpha/\pi}{(\upsilon-\upsilon_0)^2} \right) \right] d(\upsilon-\upsilon_0) + \right.$$

$$\left. + \int_{\Delta\upsilon_2} \left[1 - \exp\left(- \frac{S\,m\,\alpha/\pi}{(\upsilon-\upsilon_0)^2} \right) \right] d(\upsilon-\upsilon_0) \right\} \tag{1. 8}$$

$\Delta\upsilon_1 = (-\infty\,,\,-\sqrt{S\,m\,\alpha/\pi}]$ e $\Delta\upsilon_2 = [\,+\sqrt{S\,m\,\alpha/\pi},\,+\infty)$.

(a) $\upsilon < \upsilon_0$ $(\Delta\upsilon < 0)$

$$\frac{1}{\Delta\upsilon} \int_{-\infty}^{-\sqrt{S\,m\,\alpha/\pi}} \left\{ 1 - \exp\left[- \frac{S\,m\,\alpha/\pi}{(\upsilon-\upsilon_0)^2} \right] \right\} d(\upsilon-\upsilon_0)$$

$$= -\frac{1}{2\,\Delta\upsilon} \sqrt{S\,m\,\alpha/\pi} \int_0^{\pi} [1-\exp(-\mu)]\, \mu^{-3/2} \,.\, d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\Delta\upsilon} \sqrt{S\,m\,\alpha/\pi} \,.\, 2\,[\mu^{1/2}]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\Delta\upsilon} \sqrt{S\,m\,\alpha} = + \frac{1}{|\Delta\upsilon|} \sqrt{S\,m\,\alpha} \tag{1. 9}$$

(b) $\upsilon > \upsilon_0$ $(\Delta\upsilon > 0)$

$$\frac{1}{\Delta\upsilon} \int_{+\sqrt{S\,m\,\alpha/\pi}}^{+\infty} \left(1 - \exp\left[- \frac{S\,m\,\alpha/\pi}{(\upsilon-\upsilon_0)^2} \right] \right) d(\upsilon-\upsilon_0)$$

$$= -\frac{1}{2\,\Delta\upsilon} \sqrt{S\,m\,\alpha/\pi} \int_{\pi}^{0} [1-\exp(-\mu)]\, \mu^{-3/2} .\, d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\Delta\upsilon} \sqrt{S\,m\,\alpha/\pi} \,.\, 2\,[\mu^{1/2}]_{\pi}^{0} = \frac{1}{\Delta\upsilon} \sqrt{S\,m\,\alpha} \tag{1. 10}$$

Da equação (1. 8) resulta portanto a seguinte igualdade aproximada:

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{2}{\Delta\upsilon}\sqrt{S\,m\,\alpha} \qquad (1.\ 11)$$

Quando se obteve a igualdade aproximada (1.3), correspondente a camadas ópticas finas, admitiu-se que, na função integranda da equação (1.2), pode substituir-se exp [-k(υ)m] por 1-k(υ)m. Quando obtivemos a aproximação (1.11), correspondente a camadas ópticas espessas, admitiu-se a mesma hipótese e, no cálculo da absorção média, não considerámos a contribuição do intervalo ($\Delta\upsilon = -\sqrt{S}\, m\, \alpha/\pi,\ +\sqrt{S}\, m\, \alpha/\pi$) onde o valor da absorção espectral assume os valores mais elevados.

No 1º caso, o resultado só se utiliza quando a espessura óptica correspondente à frequêncina central da risca é muito pequena; portanto, o valor de $X=(S\,m\,\alpha/\pi)\,/\,[\,(\upsilon-\upsilon_0)^2+\alpha^2]$ é sempre muito pequeno, mesmo nas frequências próximas de υ_0. Justifica-se, neste caso, a aproximação exp [-K (υ)m] ± 1-K (υ)m.

No 2º caso, a situação não é tão simples. Primeiro porque, na espessura óptica da equação (1.4), desprezamos α^2 no denominador; esta aproximação, como dissemos, pode justificar-se porque a influência de α^2 só é significativa próximo da frequência central, onde a absorção é muito forte, mesmo com α^2 no denominador. Por outro lado porque o numerador da espessura óptica, dado por $S\,m\,\alpha/\,\pi = 2\,\alpha^2\,(Sm/2\pi\alpha)$, é o produto de dois factores, um dos quais é muito pequeno em relação ao outro. Na região do infravermelho, um limite superior de α é 15 cm^{-1}; uma banda de absorção do vapor de água, situada no intervalo (0.8-0.84 μ), apresenta na região central coeficientes de absorção próximos de 0.10 cm^{-1} nas condições médias da camada limite inferior da Atmosfera; tem-se $S=K\,(\upsilon_0)\,\pi\alpha$ 1.9 cm/g; na banda Ω (1.7-2.0 μ) onde $K\,(\upsilon_0) \sim 8x10\ cm^2/9$, a espessura óptica no centro da risca mais forte, é cerca de 9.5×10^5 vezes o valor de $2\alpha^2$.

Quando $\mu = S\,m\,\alpha/\,[\pi(\upsilon-\upsilon_0)^2] = .10$, o aumento que resulta para a função integranda da equação (1.4), ao considerarmos exp (- μ) = 1 - μ, é inferior a 0,54% do valor de exp (- μ); para μ = 0.15, o aumento é ainda inferior a 1.25%; para μ = 0.20, o aumento já excede 2 28% da exp(- μ); para μ = π, tem-se 1 - exp(- μ) = 0.957.

No caso das camadas ópticas espessas, a questão que resulta de considerarmos exp(-μ)=1-μ é portanto esta: se, quando integramos a equação (1.5) substituindo exp(-μ) por 1-μ, não queremos introduzir um erro superior a dado limite, tem que ser desprezado um intervalo cuja amplitude depende da semi-largura, da espessura óptica na frequência central da risca e do limite que for fixado para o erro. Se o intervalo que não se considera na integração for $\Delta\upsilon$, os valores da absorção média que se obtêm directamente da equação (1.4) e da aproximação (1.11) são iguais. O nosso objectivo é agora justificar esta afirmação.

Whitaker e Watson (1915) demonstraram que o integral da equação (1.4) é equivalente a $2\pi\alpha.\ \mathcal{F}(Sm/2\pi\alpha)$. $\mathcal{F}(Sm/2\pi\alpha)$ chama-se "Função de Landenberg e Reiche" (1913); o seu argumento é metade da espessura óptica correspondente à frequência central da risca; foi tabulada por Kaplan e Eggers (1956). Apresenta propriedades importantes que o "Diagrama de Matheson" (1932) põe em realce.

Este diagrama consiste na representação de $\log_{10}$ $[\mathcal{F}(Sm/2\pi\alpha)/(Sm/2\pi\alpha)]$ em função de $\log(Sm/2\pi\alpha)$. Para valores pequenos de $Sm/2\pi\alpha$, o diagrama tem uma assíntota paralela ao eixo das abcissas, que contém o ponto onde $\mathcal{F}(Sm/2\pi\alpha)=Sm/2\pi\alpha$; este facto confirma a validade da aproximação (1.3). Para valores elevados de $Sm/2\pi\alpha$, a curva tem uma assíntota dada por $\log_{10}$ $(Sm/2\pi\alpha)/(Sm/2\pi\alpha)=-.487 \log_{10}(Sm/2\pi\alpha)-.121$; desta equação resulta que $\mathcal{F}(Sm/2\pi\alpha) \simeq \frac{1}{\pi}\sqrt{Sm\alpha}$; este facto confirma a validade da aproximação (1.11).

3. UM MODELO DE RISCAS INDEPENDENTES

No modelo que vamos descrever utiliza-se uma função densidade de probabilidade para representar a distribuição da intensidade das riscas. As limitações deste modelo são mais sensíveis quando é aplicado a camadas ópticas espessas e resultam de não considerar o efeito da sobreposição das riscas do espectro. Todavia, permite calcular o valor médio da função de absorção utilizando a teoria correspondente a uma risca isolada, independentemente da largura da banda, utilizando valores de intensidades das riscas do modelo que se ajustam aos valores das intensidades das riscas do espectro.

O modelo é constituído por um conjunto de riscas de intensidades não necessariamente iguais. A localização da frequência central de cada risca é aleatória; todos os valores de $\upsilon_{0,i} \in \Delta\upsilon$ são igualmente prováveis. Representamos por δ o espaçamento médio das riscas do modelo. $\Delta\upsilon=N\delta$ representa, por isso, a amplitude do intervalo de aplicação do modelo. Considera-se este intervalo dividido em N subintervalos $\Delta\upsilon_i$ $(i=1, \ldots, N)$ de amplitude δ, onde cada uma das riscas do modelo se supõe isolada. O coeficiente de absorção em cada um destes intervalos resulta apenas da contribuição de uma risca.

O valor médio da função de absorção no intervalo $\Delta\upsilon$ é dado por

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{1}{N\delta} \int_{\upsilon_0 - N\delta/2}^{\upsilon_0 + N\delta/2} \{1 - \exp[- K(\upsilon)\, m]\}\, d\upsilon \tag{1.12}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta} \int_{\upsilon_{0i}-\delta/2}^{\upsilon_{0i}+\delta/2} \{1 - \exp[- k_i(\upsilon)\, m]\}\, d\upsilon \tag{1.13}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \bar{A}(\Delta\upsilon_i) \tag{1.14}$$

υ_0 representa a frequência média do intervalo de aplicação do modelo. $\upsilon_{0,i}$ são as frequências centrais das riscas do modelo que fazem a cobertura do intervalo $\Delta\upsilon$. $K_i(\upsilon)$ são os coeficientes monocromáticos de absorção, por unidade de massa, nas frequências dos subintervalos $\Delta\upsilon_i$. Da equação anterior resulta que o valor médio da função de absorção, no intervalo de aplicação do modelo, é a média aritmética dos valores da absorção média, calculados nos intervalos onde cada risca do modelo se considera isolada. Estes intervalos têm amplitude $\Delta\upsilon_i=\delta$; a frequência média de cada intervalo coincide com a frequência central da risca que faz a sua cobertura.

O integral da equação (1.13) chama-se espessura equivalente da risca i, no percurso homogéneo m.

O valor deste integral representa-se por χ_i. A absorção média, em cada intervalo $\Delta\upsilon_i$, é portanto dada por

$$\bar{A}(\Delta\upsilon_i) = \chi_i/\delta \tag{1.15}$$

O valor médio das espessuras equivalentes das N riscas do modelo é o seguinte:

$$\bar{\chi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi_i = \frac{1}{N} \int_{\upsilon_0-N\delta/2}^{\upsilon_0+N\delta/2} \{1 - \exp[-k(\upsilon)\, m]\}\, d\upsilon$$

$$= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 - \exp[- K(\upsilon)\, m]\}\, d(\upsilon-\upsilon_0) \tag{1.16}$$

$k(\upsilon)$ representa o coeficiente de absorção na frequência υ e o seu valor resulta apenas da risca i que cobre o intervalo $(\upsilon_{0i}-\delta/2, \upsilon_{0i}+\delta/2)$, onde se situa υ. O alargamento da integração ao intervalo $(-\infty, +\infty)$ não afecta o valor calculado χ porque a hipótese de não sobreposição implica que, fora do intervalo $\Delta\upsilon$, são nulas as contribuições das riscas deste intervalo para os coeficientes monocromáticos de absorção. O valor médio das espessuras equivalentes das N riscas do modelo, calculadas em cada subintervalo $\Delta\upsilon_i$, é dado pela equação (1.16). A absorção média no intervalo $\Delta\upsilon$, está relacionada com o valor de χ, por intermédio da equação seguinte:

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{\bar{\chi}}{\delta} = \frac{1}{N\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 - \exp[-K(\upsilon)\, m]\}\, d(\upsilon-\upsilon_0) \qquad (1.17)$$

O valor médio da função de absorção, dado por este modelo, é igual ao que se obtém se, em $\Delta\upsilon$, considerarmos uma risca isolada cuja espessura equivalente é a soma das espessuras equivalentes χ_i das riscas do modelo que cobrem o intervalo. Este valor da absorção média é necessariamente menor que o obtido considerando os valores χ_i calculados não em $(\upsilon_{0i}-\delta/2, \upsilon_{0i}+\delta/2)$ mas em $(\upsilon_0-N\delta/2, \upsilon_0+N\delta/2)$; as contribuições $k_i(\upsilon)$ não se anulam fora do respectivo $\Delta\upsilon_i$. Por esta razão, o modelo conduz a valores de absorção média inferiores aos que são obtidos quando se calcula a absorção média correspondente a uma risca isolada, cuja espessura equivalente é igual à soma das espessuras equivalentes das N riscas do modelo, calculadas em todo o intervalo $\Delta\upsilon$. A limitação é mais evidente quando o modelo se aplica a camadas ópticas espessas; neste caso, a absorção resultante da parcela de espessura óptica que se despreza é maior do que quando se trata das camadas finas. Em cada banda, a limitação deste modelo é tanto mais significativa quanto maior for o percurso óptico da radiação.

Representemos por $P_i(S_j)\, ds$ a probabilidade de uma das riscas do modelo em $\Delta\upsilon$, ter a respectiva intensidade (S_j) contida no intervalo (S_j, S_j+ds). O integral

$$\int_0^{\infty} p_i(S_j)\, ds = 1 \qquad (1.18)$$

representa a probabilidade da existência da risca.

Retomemos a equação (1.17); o valor médio da função de absorção, calculado utilizando o modelo, é dado por:

$$\bar{A}(\Delta \upsilon) = \frac{1}{N\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 - \exp[- K(\upsilon) m]\} \, d(\upsilon-\upsilon_0)$$

$$= \frac{1}{N\delta} \left[\int_{\Delta\upsilon_1} \{1 - \exp[- K(\upsilon) m]\} \, d\upsilon + \ldots + \int_{\Delta\upsilon_N} \{1 - \exp[- K(\upsilon) m]\} \, d\upsilon \right]$$

(1.19)

Supõe-se que existe a frequência $\upsilon_i^* \in \Delta\upsilon_i$ ($i=1, \ldots, N$) onde o valor da absorção espectral se identifica com a absorção média em $\Delta\upsilon_i$; $A(\upsilon_i^*) = A(\Delta\upsilon_i)$. Pelo teorema da média resulta o seguinte:

$$\Delta\upsilon_i \{1-\exp[- k(\upsilon_i^*) m]\} = \int_{\Delta\upsilon_i} \{1- \exp[-k(\upsilon) m]\} \, d\upsilon \qquad (1.\ 20)$$

E o valor da absorção média em $\Delta\upsilon$ é então dado por:

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{1}{N\delta} [\{1-\exp[-K(\upsilon_1^*) m]\} \Delta\upsilon_1 + \ldots +$$

$$+ \{1-\exp[-K(\upsilon_N^*) m]\} \Delta\upsilon_N] \qquad (1.\ 21)$$

Se a intensidade da risca i, à temperatura do percurso m, fosse S_i^0, o coeficiente monocromático de absorção na frequência υ_i^* satisfazia a condição seguinte:

$$K(\upsilon_i^*) = S_i \, \Phi(\upsilon_i^*) \qquad (1.\ 22)$$

onde $\Phi(\upsilon_i^*)$ representa o valor do factor de forma da risca i, na frequência υ_i^*. Admite-se que as riscas têm todas a mesma semi--largura (α). Por isso,

$$\Phi(\upsilon_i^*) = \frac{\alpha}{\pi [(\upsilon_i^*-\upsilon_{0i})^2 + \alpha^2]} \qquad (1.\ 23)$$

Todavia não se conhece o verdadeiro valor da intensidade da risca i. Portanto, o valor espectável de cada $A(\upsilon^*i)$ é o somatório dos produtos dos valores possíveis, pela probabilidade de ocorrência que lhes corresponde:

$$A_0(\upsilon_1^*) = p_1(S_1) \{1 - \exp[- S_1^1 \Phi(\upsilon_1^*) m]\} \Delta S + \ldots +$$

$$+ p_1 (S_n) \{1 - \exp [- S_1^n \Phi (\upsilon_1^*) m] \} \Delta S + \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$A_0 (\upsilon_N^*) = p_n (S_1) \{1 - \exp [- S_N^1 \Phi (\upsilon_N^*) m]\} \Delta S + \ldots +$$

$$+ p_n (S_n) \{1-\exp [- S_N^n \Phi (\upsilon_N^*) m]\} \Delta S + \ldots \qquad (1.24)$$

$$A_0 (\upsilon_i^*) = \sum_j p_i (S_j) \{1 - \exp [- S_i^j \Phi (\upsilon_i^*) m] \} \Delta S \qquad (1.25)$$

$$A_0 (\upsilon^*_{i = 1, \ldots, N}) = \int_0^\infty p_i (S) \{1 - \exp [- S_i \Phi (\upsilon_i^*) m] \} ds \qquad (1.26)$$

Retome-se agora a equação (1. 21). O valor espectável para a absorção média em $\Delta\upsilon$ satisfaz as seguintes relações:

$$\bar{A}_0 (\Delta\upsilon) = \frac{1}{N\delta} [A_0 (\upsilon_1^*) \Delta\upsilon_1 + \ldots + A_0 (\upsilon_N^*) \Delta\upsilon_N]$$

$$= \frac{1}{N\delta} [\Delta\upsilon_1 \int_0^\infty p_1 (S) \{1-\exp [-S_1 \Phi (\upsilon_1^*) m]\} ds + \ldots +$$

$$+ \Delta\upsilon_N \int_0^\infty p_N (S) \{1-\exp [-S_N \Phi (\upsilon_N^*) m]\} ds] \qquad (1.27)$$

$$\bar{A}_0 (\Delta\upsilon) = \frac{1}{N\delta} \sum_{i=1}^{N} \Delta\upsilon_i \int_0^\infty p_i (S) \{1-\exp [-S_i \Phi (\upsilon_i^*) m] \} ds \qquad (1.28)$$

Cada parcela deste somatório representa o valor médio, em $\Delta\upsilon_i$, de cada valor espectável $A_0 (\upsilon_i^*)$. Estes valores médios são iguais porque o valor que o factor de forma assume numa dada frequência de um intervalo $\Delta\upsilon_i$, identifica-se com um valor noutro intervalo $\Delta\upsilon_j$. As amplitudes dos intervalos $\Delta\upsilon_i$ são iguais.

Tem-se portanto o seguinte:

$$\bar{A}_0(\Delta\upsilon) = \frac{1}{N\delta}\left[N\,\Delta\upsilon_1 \int_0^{\infty} p(S)\{1 - \exp[-S\,\Phi(\upsilon^*)\,m]\}\,ds\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_{\Delta\upsilon} d\upsilon \int_0^{\infty} p(S)\{1 - \exp[-S\,\Phi(\upsilon^*)\,m]\}\,ds \qquad (1.\,29)$$

* * *

Considerando a seguinte função distribuição

$$p(S) = \frac{1}{\sigma}\exp(-S/\sigma) \qquad (1.\,30)$$

tem-se o seguinte:

$$p(S)\{1 - \exp[-S\,\Phi(\upsilon^*)m] = \frac{1}{\sigma}\{\exp(-\frac{S}{\sigma}) - \exp[-\frac{S}{\sigma}(\sigma\,\Phi(\upsilon^*)\,m + 1)]\} \qquad (1.\,31)$$

O valor espectável da absorção média, resultante do modelo, vem então dado por:

$$\bar{A}_0(\Delta\upsilon) = \frac{1}{\delta\sigma}\int_{\Delta\upsilon} d\upsilon \int_0^{\infty} [\exp(-\frac{S}{\sigma}) - \exp[-\frac{S}{\sigma}(\sigma\,\Phi(\upsilon^*)\,m+1)]]\,ds$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\int\{[-\exp(-\frac{S}{\sigma})]_0^{\infty} + [\frac{\exp\{-S/\sigma\,[\Phi(\upsilon^*)\,m\,\sigma + 1]\}}{\Phi(\upsilon^*)\,m\sigma + 1}]_0^{\infty}\}\,d\upsilon\right]$$

$$(1.\,32)$$

$$= \frac{1}{\delta}\{\int_{\Delta\upsilon}[1 - \frac{1}{\Phi(\upsilon^*)\,m\,\sigma + 1}]\,d\upsilon\}$$

$$= \frac{m\sigma}{\delta}\int_{\Delta\upsilon}\frac{\Phi(\upsilon^*)}{\Phi(\upsilon^*)\,m\,\sigma + 1}\,d\upsilon \qquad (1.\,33)$$

Substituindo o factor de forma pelo seu valor dado pela eq.

(1. 23) resulta:

$$A_0(\Delta\upsilon) = \frac{m\,\sigma\,\alpha}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,(\upsilon - \upsilon_{0i})}{[\pi\,\alpha^2 + m\,\sigma\,\alpha + \pi\,(\upsilon-\upsilon_{0i})^2]} \tag{1.34}$$

$$= \frac{m\,\sigma\,\alpha}{\delta}\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\,[(\upsilon-\upsilon_{0i})\sqrt{\pi/(\pi\alpha^2 + m\,\sigma\,\alpha)}\,]}{\sqrt{\pi/(\pi\,\alpha^2 + m\,\sigma\,\alpha)}}\right]_{\upsilon-\upsilon_{0i} = -\infty}^{\upsilon-\upsilon_{0i} = +\infty}$$

(1. 35)

$$= \frac{m\,\sigma\sqrt{\pi\,\alpha}}{\delta\sqrt{m\,\sigma + \pi\,\alpha}} \tag{1.36}$$

Quando se analisou a absorção resultante do modelo de uma risca isolada, obteve-se a equação (1.2) que permite calcular o valor médio da função de absorção correspondente a um intervalo de frequência $\Delta\upsilon$. No caso presente temos a equação (1.36), que serve para calcular o valor mais adequado para a absorção média num intervalo onde existem N riscas do modelo, de igual semi-largura, cada uma isolada num subintervalo $\Delta\upsilon_i$ de amplitude igual ao espaçamento médio δ.

A absorção média identifica-se, como se vê pela equação (1.17), com a absorção média num intervalo $\Delta\upsilon_i$, resultante de uma risca que pode pertencer ou não ao modelo. A espessura equivalente desta risca é a média das espessuras das N riscas, calculadas em cada $\Delta\upsilon_i$.

Nos parágrafos seguintes estudam-se as consequências e as condições de aplicação do modelo, nos casos limite das camadas ópticas finas e espessas.

Quando a espessura óptica correspondente à frequência central de uma risca é muito pequena, a absorção média no intervalo onde a risca se considera, é dada pela equação (1.3); mas quando $S_i\, m/2\pi\, \alpha << 1$ ($i = 1, \ldots, N$), também se tem $m\,\sigma << \pi\,\alpha$. Resulta, neste caso, da equação (1.36), a seguinte igualdade aproximada:

$$\bar{A}_0(\Delta\upsilon) = \frac{m\sigma}{\delta} \tag{1.37}$$

Esta igualdade é válida sempre que as espessuras ópticas correspondentes às frequências centrais das riscas do modelo sejam muito pequenas; é equivalente à equação (1.3) desde que se identifique S com σ e $\Delta\upsilon$ com $\Delta\upsilon_i$.

O modelo que estamos a analisar, aplicado ao intervalo $\Delta\upsilon$, na situação limite das camadas finas, conduz ao mesmo valor de absorção média que o resultante do modelo de uma risca isolada, de intensidade igual à média das intensidades das riscas do modelo em $\Delta\upsilon$, num intervalo $\Delta\upsilon_i$. Convirá dizer que a condição $S_i m/2\pi\alpha \ll 1$ ($i = 1, \ldots, N$) é suficiente mas não é necessária para que seja válida a equação (1.37). A condição necessária e suficiente é que se tenha $\sigma m/2\pi\alpha \ll 1$.

Se no intervalo $\Delta\upsilon$, as espessuras ópticas correspondentes às frequências centrais das riscas do modelo satisfizerem a condição $S_i m/2\pi\alpha \gg 1$ ($i=1, \ldots, N$), ter-se-á então $m\sigma \gg \pi\alpha$. Neste caso resulta, da equação (1.36), o seguinte:

$$\bar{A}_0(\Delta\upsilon) = \frac{\sqrt{m\sigma\pi\alpha}}{\delta} \qquad (1.38)$$

A equação (1.11) dá o valor da absorção média num intervalo onde se situa uma risca isolada, nas condições em que é válida a equação (1.38). O valor $2\sqrt{Sm\alpha}$ que intervém na equação (1.11), é uma aproximação da espessura equivalente de uma risca isolada em $\Delta\upsilon$. Portanto, atendendo a equação (1.17), se a cada risca do modelo, em $\Delta\upsilon$, fizermos corresponder a espessura equivalente $2\sqrt{S_i m\alpha}$, podemos calcular a absorção média em $\Delta\upsilon$, utilizando a seguinte aproximação:

$$\bar{A}(\Delta\upsilon) = \frac{2}{\Delta\upsilon}\sum_i \sqrt{S_i m\alpha} \qquad (1.39)$$

As equações (1.38) e (1.39) dão o valor da absorção média no intervalo de aplicação do modelo. Qualquer delas tem que se verificar na situação limite das camadas ópticas espessas. Assim sendo, uma condição necessária para que o modelo possa ser utilizado neste caso limite, é que se verifique a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\delta}\sqrt{m\sigma\pi\alpha} = \frac{2}{\Delta\upsilon}\sum_i \sqrt{S_i m\alpha} \qquad (1.40)$$

Atendendo a que $\sigma = \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i}{N}$ e $\Delta\upsilon = N\delta$, tem-se

$$\sum_i \sqrt{S_i} \Big/ \sqrt{\sum_i S_i} = \frac{\sqrt{N\pi}}{2} \qquad (1.41)$$

Supomos agora que as riscas não têm necessariamente a mesma semi-largura mas que as diferenças são suficientemente pequenas para que, na equação (1.38), possamos considerar

$\alpha=\sum \alpha_i/N= \alpha$.Neste caso, em vez da equação (1.40) tem-se o seguinte:

$$\frac{1}{\delta}\sqrt{m\sigma\pi\tilde{\alpha}} = \frac{2}{\Delta\upsilon}\sum_{i}\sqrt{S_i\, m\, \alpha_i} \qquad (1.42)$$

Donde resulta uma condição necessária para que o modelo possa aplicar-se a camadas ópticas moderadamente espesssas, quando as semi-larguras são ligeiramente diferentes:

$$\frac{\sum \sqrt{S_i\,\alpha_i}}{\sqrt{\sum_i S_i \sum_i \alpha_i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (1.43)$$

* * *

Bibliografia

1. BENEDICT, W. S., Herman, R., Moore, G. E., Silverman, S., The Strengths, Widths and Shapes infrared lines, Canadian Journal of Physics, 850-875, *1956.*
2. COWLING, M. A., The absorption of infrared radiation in the Atmosphere, Quart. Journ. Roy. Met. Soc., 68, 296, 197-200, *1950.*
3. GOODY, R. M., A statistical model for water-vapour absorption, Quart. Journ. Meteor. Soc., 78, 165-169, *1952*
4. GOODY, R. M., Atmospheric Radiation I - Theorical Basis, Oxford at Clarendon Press, *1964.*
5. HOLSTEIN, I., Pressure broadening of spectral Lines, Physical Rev., 79, 744, *1950.*
6. HOUGHTON, H. G., Physical Meteorology, MIT, Press, Cambridge, Massachusetts, London England, *1985.*
7. KAPLAN, L. D., et al., Regions of validity of various absorption-coefficient approximations, Journ. of Meteor., 10, 100-104, *1956.*
8. KONDRATYEV, K. Y., Radiation in the Atmosphere, Academic Press, *1969.*
9. LANDENBURG, R., und REICHE, F., Uber Selektive absorption, annalen der Physik, 42, 181-209, *1913.*
10. PEIXOTO, J. P., Cadeira de Meteorologia I - Estudo da radiação na Atmosfera, Universidade de Lisboa, *1975.*
11. RANK, D. H., Eastman, D. P., Birtley, W. B., and Wiggins, T. A., Shapes and Breadths of some molecular rotation-vibration band lines perturbed by rare gases, Journal of Chemical Physics, 33, 2, 327-328, *1960.*
12. SPITZER, L. J., Impact broadening of Spectral lines, Phys. Rev., 58, 348-357, *1940.*
13. WINTERS, B. H., Line Shape in the wing beyhond the band head of the 4.3 band of CO_2, Journ. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf, 4, 527-537, *1964.*
14. ZUEV, V. E., Atmospheric Transparency in the visible and the infrared, Israel Program for Scientific translations, *1970.*